

# Surface de volatilité

Peter TANKOV  
Université Paris-Diderot (Paris VII)  
tankov@math.univ-paris-diderot.fr

Dernière m.à.j. February 15, 2015

Ce document est mis à disposition sous un contrat Creative Commons  
(pas d'Utilisation Commerciale — pas de Modification)

La dernière version est disponible à l'adresse  
[www.proba.jussieu.fr/pageperso/tankov/](http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/tankov/)



# Table de matières

<b>1</b>	<b>Les marchés de produits dérivés</b>	<b>5</b>
1.1	Historique . . . . .	5
1.2	Fonctionnement des marchés d'options . . . . .	5
1.3	Différents types de sous-jacents . . . . .	6
1.4	Les options européennes . . . . .	6
1.5	Les options américaines . . . . .	8
1.6	Les options exotiques . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Le modèle de Black et Scholes et la volatilité implicite</b>	<b>11</b>
2.1	Le modèle de Black et Scholes . . . . .	11
2.1.1	Portefeuille autofinçant . . . . .	11
2.1.2	Evaluation risque-neutre . . . . .	12
2.1.3	Formule de Black et Scholes . . . . .	12
2.1.4	Option sur un actif versant des dividendes . . . . .	13
2.1.5	Exemples de couverture en delta . . . . .	13
2.1.6	L'utilisation du modèle de Black-Scholes dans les marchés d'options . . . . .	13
2.2	Compléments sur le modèle de Black-Scholes . . . . .	15
2.2.1	Couverture en temps discret . . . . .	15
2.2.2	Couverture en delta-gamma . . . . .	17
2.2.3	Robustesse de la formule de Black-Scholes . . . . .	19
2.3	La volatilité implicite . . . . .	19
2.3.1	Rôle de la volatilité implicite dans les marchés d'options . . . . .	21
2.3.2	Prise en compte des dividendes dans le calcul de la volatilité implicite . . . . .	22
2.3.3	Une interprétation de la volatilité implicite . . . . .	22
2.4	Complément: formule de Garman-Kohlhagen et cotation d'options sur taux de change . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Les modèles à volatilité locale et la diffusion implicite</b>	<b>25</b>
3.1	Modèles à volatilité locale . . . . .	25
3.2	Modèle CEV . . . . .	26
3.3	Arbre trinomial de pricing . . . . .	27
3.4	Diffusion implicite de Dupire . . . . .	29
3.5	Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale . . . . .	36
3.6	Calibration de la volatilité locale . . . . .	37
3.6.1	Interpolation de la volatilité implicite . . . . .	38
3.6.2	Approche par régularisation . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Les modèles à volatilité stochastique</b>	<b>43</b>
4.1	Equations de pricing et de couverture . . . . .	43
4.2	Application à l'arbitrage de volatilité . . . . .	47
4.3	Estimation de volatilité . . . . .	50
4.4	Paramétrisation de Heston . . . . .	53
4.5	Méthode de transformée de Fourier pour la valorisation d'options européennes . . . . .	56

4.6	Complément: les diffusions affines . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Volatilité implicite dans les modèles à volatilité stochastique</b>	<b>65</b>
5.1	Un principe de symétrie pour la volatilité implicite . . . . .	65
5.2	Cas de vol de vol faible: développement autour de Black-Scholes . . . . .	66
5.3	Comportement aux strikes extrêmes via l'explosion des moments: la formule de Roger Lee . . . . .	69
5.4	Volatilité implicite en temps petit / en temps grand par les grandes déviations . . . . .	72
5.4.1	Volatilité implicite en temps petit dans le modèle de Heston [21] . . . . .	74
5.4.2	Volatilité implicite en temps grand dans le modèle de Heston [22] . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Produits dérivés de volatilité</b>	<b>77</b>
6.1	Swaps de variance . . . . .	77
6.2	Swap de variance pondéré . . . . .	79
6.3	Options sur variance réalisée . . . . .	80
6.4	Lien avec les options américaines et le plongement de Skorokhod . . . . .	81
<b>A</b>	<b>Méthodes numériques pour la calibration de modèles</b>	<b>85</b>
A.1	Algorithmes d'optimisation . . . . .	85
A.1.1	Optimisation: rappels théoriques . . . . .	85
A.1.2	Problèmes d'optimisation en finance . . . . .	86
A.1.3	Minimisation de fonctions convexes . . . . .	86
<b>B</b>	<b>Quelques rappels sur le calcul stochastique et les processus de Markov</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

# Chapitre 1

## Les marchés de produits dérivés

### 1.1 Historique

Le premier marché d'options moderne est apparu en 1973 — c'était le CBOE (Chicago Board of Options Exchange). Remarquons (sans prétendre qu'il y a un lien entre les deux événements) que le célèbre article de Fisher Black et Myron Scholes "The pricing of options and corporate liabilities" a été publié dans la même année. De l'autre côté de l'Atlantique, le premier marché d'options a été créé à Londres en 1978 (London Traded Option Exchange aujourd'hui devenu LIFFE qui fait maintenant partie du groupe Euronext). En France, le MONEP (Marché d'Options NEgotiables de Paris) a ouvert ces portes en 1987.

### 1.2 Fonctionnement des marchés d'options

Le rôle des marchés organisés d'options est tout d'abord d'assurer la liquidité des options, c'est-à-dire, la cotation permanente et l'existence d'un prix unique pour une option donnée. Deuxièmement, l'existence de marchés organisés simplifie la gestion des contrats optionnels en éliminant le risque de contrepartie, car la contrepartie unique de tous les contrats sur un marché organisé est la chambre de compensation de la bourse. Les différents participants des marchés d'options sont

- Les *brokers* (courtiers) qui exécutent les ordres des investisseurs;
- Les *market makers* (teneurs de marché) qui risquent leur propre capital et assurent la liquidité du marché. Les *spécialistes* affichent en permanence les prix sur les options les plus liquides. Les *contrepartistes* répondent aux demandes de prix.
- La *chambre de compensation* qui sert à éliminer le risque de contrepartie. Elle demande aux vendeurs d'options le versement du dépôt de garantie et des *appels de marge*.

**Calcul du dépôt de garantie dans les marchés d'options** Dans ce paragraphe, nous détaillons les règles qui sont appliquées par CBOE aux comptes de ses clients. Selon ces règles, les marges sont calculées séparément pour chaque position:

- Pour les positions longues de calls/puts, le prix complet doit être payé.
- Pour une position courte non couverte en une option call, la marge à l'instant  $t$  est calculée en utilisant la formule suivante:

$$M_t = P_t^K + \max(\alpha S_t - (K - S_t)1_{K > S_t}, \beta S_t) := P_t^K + \lambda_t^K,$$

où  $P^K$  est le prix de l'option,  $\alpha = 0.15$  et  $\beta = 0.1$ .

- La marge pour "position longue en un call plus position courte dans le sous-jacent" est égale au prix du call augmentée du résultat de la vente à découvert et de 50% du prix du sous-jacent.

- La marge pour "position courte en un call plus position longue dans le sous-jacent" est égale à 50% du prix du sous-jacent.

En plus, des réductions de marge sont prévues pour certains spreads.

Les autres bourses, par exemple, CME pour les grands clients institutionnels, utilisent un système alternatif de calcul des marges, connu sous le nom de Standard Portfolio Analysis of Risk (SPAN). Dans ce système, la marge est calculé comme la pire perte sur 14 scénarios du marché.

### 1.3 Différents types de sous-jacents

Les options sont écrites sur

- Actions (CBOE: 1332 actions, MONEP: 67 actions)
- Indices (CAC40, S&P500, indices sectoriels...)
- Taux de change (PHLX)
- Obligations ou swaps
- Futures sur marchandises (commodity): cacao, café, sucre, blé mais aussi des matières premières, l'électricité etc.

Les marchés les plus liquides sont ceux d'options sur indices. Ce sont aussi des marchés où on a le plus besoin d'une calibration précise (car les fourchettes bid-ask sont étroites) et où on a le maximum de données disponibles (par exemple, sur CBOE on trouve plus de 500 options de 8 maturités différentes allant de quelques jours à deux ans sur l'indice S&P 500).

### 1.4 Les options européennes

Les options européennes et américaines sont des options les plus liquides, leurs prix sont connus et peuvent donc être utilisés comme entrées des algorithmes de calibration. Les options sur indices sont typiquement européennes.

Pour les options européennes l'exercice est possible uniquement à la maturité  $T$ ; le payoff ne dépend que du prix de sous-jacent à la date finale.

$$\text{Call: } H_T = (S_T - K)^+ \quad \text{Put: } H_T = (K - S_T)^+$$

#### Terminologie

- $K$  : *strike* (prix d'exercice).
- Une option est à *la monnaie* à la date  $t$  si à cette date  $K = S_t$ .
- Une option est *dans la monnaie*: si elle devait expirer aujourd'hui son pay-off serait positif.
- La *valeur intrinsèque* d'une option est la quantité d'argent qu'elle rapporterait si elle devait expirer aujourd'hui (la valeur du pay-off aujourd'hui).
- La *valeur temps* d'une option est égale à son prix moins sa valeur intrinsèque.

Les options les plus liquides sont les options à la monnaie (ATM) et, dans une moindre mesure, les options hors de la monnaie (OTM).

Un exemple de feuille de prix d'options européennes est donné sur fig. 1.1.

**.SPX (CBOE)** **1199.21 +0.53**

Dec 14, 2004 @ 12:15 ET (Data 15 Minutes Delayed)

Calls	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int	Puts	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int
<a href="#">04 Dec 1190. (SPT LR-E)</a>	12.00	-1.00	11.20	12.80	897	29000	<a href="#">04 Dec 1190. (SPT XR-E)</a>	2.25	-0.60	2.10	2.60	1579	20741
<a href="#">04 Dec 1195. (SPT LS-E)</a>	8.30	-1.20	7.80	9.00	1882	12938	<a href="#">04 Dec 1195. (SPT XS-E)</a>	4.00	-0.50	3.50	4.30	1782	5846
<a href="#">04 Dec 1200. (SZP LT-E)</a>	5.60	-0.70	5.10	6.00	12635	56793	<a href="#">04 Dec 1200. (SZP XT-E)</a>	6.20	-0.20	5.70	6.60	8840	24317
<a href="#">04 Dec 1205. (SZP LA-E)</a>	3.50	-0.70	3.10	3.80	2404	12758	<a href="#">04 Dec 1205. (SZP XA-E)</a>	8.90	-2.10	8.30	9.50	2	100
<a href="#">05 Jan 1190. (SPT AR-E)</a>	25.00	pc	23.60	25.60	0	418	<a href="#">05 Jan 1190. (SPT MR-E)</a>	14.00	+0.20	13.50	14.80	210	2408
<a href="#">05 Jan 1195. (SPT AS-E)</a>	21.20	+2.60	20.60	22.60	32	647	<a href="#">05 Jan 1195. (SPT MS-E)</a>	15.50	-0.90	15.20	16.80	7	1687
<a href="#">05 Jan 1200. (SZP AT-E)</a>	18.80	-0.20	18.20	18.80	2296	32656	<a href="#">05 Jan 1200. (SZP MT-E)</a>	18.00	--	17.30	18.50	3279	7301
<a href="#">05 Jan 1205. (SZP AA-E)</a>	15.40	-1.10	15.40	17.00	52	0	<a href="#">05 Jan 1205. (SZP MA-E)</a>	20.20	-1.50	19.70	21.30	9	2

Figure 1.1: Exemple de cotation (les options les plus liquides sur l'indice S&P 500). Ask = le prix auquel vous pouvez acheter l'option en question. Bid = le prix auquel vous pouvez le vendre.

**Propriétés des prix de calls/puts** Toutes les propriétés ci-dessous découlent de l'absence d'opportunités d'arbitrage sur les marchés d'options, en absence de dividendes, et en supposant que le prix d'achat coïncide avec le prix de vente. Se sont les contraintes d'arbitrage *statiques et sans modèle*, puisque les arbitrages correspondants ne nécessitent pas de mettre en place des stratégies de trading dynamique ni de faire des hypothèses sur la dynamique du sous-jacent.

- Parité call-put

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB(t, T),$$

où  $B(t, T)$  est le prix à l'instant  $t$  d'un zéro-coupon de maturité  $T$  (une obligation qui paie une unité d'argent à la maturité et ne verse pas de coupon). Si la courbe des taux est plate au niveau  $r$ ,  $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$ . En conséquence de la parité call-put, on obtient les bornes suivantes pour les prix de calls / puts:

$$(S_t - K)^+ < (S_t - KB(t, T))^+ \leq \text{Call}_t(T, K) \leq S_t. \quad (1.1)$$

$$(KB(t, T) - S_t)^+ \leq \text{Put}_t(T, K) \leq KB(t, T). \quad (1.2)$$

La valeur temps d'une option Call sur un actif ne versant pas de dividende est donc toujours positive.

- Le prix d'une option call est décroissant par rapport au strike (et le prix d'une put est croissant)

$$K_1 \leq K_2 \quad \Rightarrow \quad \text{Call}_t(T, K_1) \geq \text{Call}_t(T, K_2).$$

Cette propriété découle de l'existence de la stratégie call spread qui consiste à acheter une call de strike  $K_1$  et à vendre une call de strike  $K_2$ . Comme cette stratégie a un pay-off positif, son prix doit être positif.

- Les prix des calls/puts sont convexes par rapport au strike. Cette propriété correspond à la stratégie butterfly qui consiste à acheter une call de strike  $K_1$ , vendre deux calls de strike  $(K_1 + K_2)/2$  et acheter une call de strike  $K_2$ . On vérifie que cette stratégie a également un pay-off positif ou nul dans tous les états de la nature ce qui implique la convexité.
- Le prix d'une option est croissant avec la maturité:  $T_1 \leq T_2$  implique  $\text{Call}_t(T_1, K) \leq \text{Call}_t(T_2, K)$ . Cette propriété correspond à la stratégie calendar spread: acheter une call de maturité  $T_2$  et vendre une call de même strike de maturité  $T_1$ . On peut démontrer un résultat plus fort: lorsque les taux d'intérêt sont déterministes,  $T_1 \leq T_2$  implique

$$\text{Call}_t(T_1, KB(T_1, T_2)) \leq \text{Call}_t(T_2, K).$$

Dans le cas d'un put, on a uniquement

$$\text{Put}_t(T_1, KB(T_1, T_2)) \leq \text{Put}_t(T_2, K),$$

mais ce résultat n'implique pas la croissance du prix avec la maturité pour un strike fixe.

**Cas d'un sous-jacent versant des dividendes** Pour des options sur un sous-jacent versant des dividendes la relation de parité call-put est modifiée. A la maturité nous avons toujours

$$\text{Call}_T(T, K) - \text{Put}_T(T, K) = S_T - K,$$

cependant pour percevoir ce flux à la maturité, il n'est pas nécessaire d'investir  $S_t - B(t, T)K$  à la date  $t$ . Si l'action verse des dividendes discrètes connues  $D_1, \dots, D_N$  aux dates  $t_1, \dots, t_n$ , alors en achetant une action et en empruntant

$$\sum_{i=1}^N D_i B(t, t_i) + KB(t, T)$$

à la banque à la date  $t$ , on aura le flux  $S_T - K$  à la date  $T$ . La parité call-put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - \sum_{i=1}^N D_i B(t, t_i) - KB(t, T).$$

Pour les indices contenant plusieurs actions, on utilise un général l'approximation de taux de dividende continu, i.e., on suppose que l'indice  $S_t$  verse en continu une dividende égale à  $qS_t dt$ . Dans ce cas il est facile de voir que pour s'assurer le flux  $S_T$  à la maturité, on doit investir le montant  $S_t D(t, T)$  à la date  $t$ , où  $D(t, T) = e^{-q(T-t)}$ . La parité call-put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t D(t, T) - KB(t, T).$$

La dérivation des bornes analogues à (1.1)–(1.2) est laissée en exercice.

## 1.5 Les options américaines

Pour les options américaines, l'exercice est possible à toute date  $t$  avant la maturité  $T$  ou à la maturité. Le prix d'une option américaine est donc en général supérieur au prix de l'option européenne correspondante. La différence entre les deux prix s'appelle la *prime d'exercice anticipée* (early exercise premium en anglais). Dans le cas particulier de l'option call américaine sur un actif ne versant pas de dividende, comme la valeur temps est toujours strictement positive pour  $t < T$ , il n'est jamais optimal d'exercer l'option avant la maturité, et donc, le prix de l'option américaine est égal au prix de l'option européenne. Pour un put américain, toujours sans dividende, la prime d'exercice anticipée peut être positive, mais on a la borne supérieure suivante, valable dans le cas où les taux d'intérêt sont déterministes:

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{PutEuro}_t(T, K) \leq K(1 - B(t, T)).$$

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$(K - S_t)^+ \leq K(1 - B(t, T))e^{-\varepsilon(T-t)} + (KB(t, T)e^{-\varepsilon(T-t)} - S_t)^+.$$

Il en découle que le prix d'un put américain est inférieur ou égal à la somme du prix d'une option américaine de pay-off  $K(1 - B(t, T))e^{-\varepsilon(T-t)}$  (si exercice à l'instant  $t$ ) et d'une option américaine de pay-off  $(KB(t, T)e^{-\varepsilon(T-t)} - S_t)^+$ . Puisque les taux d'intérêt sont déterministes, le pay-off de la première option est décroissant avec  $t$ ; cette option est donc optimalement exercée à la date initiale. La deuxième option, quant à lui, est optimalement exercée en  $t = T$  (même argument que pour le call américain). On en déduit:

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{PutEuro}_t(T, K) \leq K(1 - B(t, T))e^{-\varepsilon(T-t)},$$

et en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat souhaité.

**Exercice 1.** Etablir un résultat analogue dans le cas d'un call européen avec dividendes.



**Contraintes d'arbitrage statique** La parité call-put n'est bien sûr pas vérifiée. Cependant, les prix des puts américains restent croissants et convexes en strike. Pour montrer la convexité, on achète un put américain de strike  $K_1$ , vend deux puts américains de strike  $(K_1 + K_2)/2$  et achète un put américain de strike  $K_2$ . Si l'option de strike  $(K_1 + K_2)/2$  est exercée à la date  $\tau$ , on peut toujours exercer les deux autres options à la même date, pour avoir un pay-off positif. Il est également clair que les prix d'options américaines sont croissants avec la maturité  $T$  car les options dont la maturité est plus grande offrent plus de possibilités d'exercice.

## 1.6 Les options exotiques

- Options à barrière: le paiement a lieu (n'a pas lieu) si le sous-jacent a dépassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date. Exemple (up and out call)

$$H_T = (S_T - K)^+ 1_{M_T < B}, \quad \text{où } M_T = \max_{t \leq u \leq T} S_u$$

- Moins chère que la call standard

- Options asiatiques: le payoff dépend de la valeur moyenne de sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix):

$$H_T = \left( \frac{1}{T-t} \int_t^T S_u du - K \right)^+$$

- Options multi-sous-jacent: sur un panier d'actions, un panier de taux de change etc.

$$H_T = \left( \sum_{i=1}^n w_i S_T^i - K \right)^+$$

- Les options forward start. Le strike d'une telle option est déterminé à une date future selon une règle spécifiée, par exemple, le pay-off peut être

$$H_T = (S_T - mS_{T_0})^+,$$

où  $T_0 < T$  est une date future et  $m$  est un nombre fixé dans le contrat (moneyness de l'option).

- Les options cliquets. Une option cliquet peut être vue comme une séquence d'options forward start, avec des dates de départ de plus en plus éloignées. Par exemple le pay-off d'une telle option de maturité  $T = 1$  an peut être donné par

$$\sum_{i=1}^{12} \max(0, r_i), \quad r_i = S_{\frac{i}{12}} - S_{\frac{i-1}{12}}.$$

Cette option permet alors de récupérer l'ensemble des performances positives d'un indice de référence sans en subir des performances négatives.



# Chapitre 2

## Le modèle de Black et Scholes et la volatilité implicite

### 2.1 Le modèle de Black et Scholes

Les hypothèses du modèle de Black-Scholes:

- Marchés efficients:
  - Pas de coûts de transaction
  - Pas de restrictions sur le volume de transactions
  - Pas d'opportunité d'arbitrage
- Les rendements du sous-jacent sont gaussiens, stationnaires et indépendants:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- Le placement à la banque est sans risque et le taux d'intérêt  $r$  est constant.

#### 2.1.1 Portefeuille autofinçant

**Définition 1.** Une stratégie autofinçante est une stratégie dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait du cash.

Soit  $\delta_t$  le nombre d'actions dans le portefeuille,  $B_t$  le solde du compte associé au portefeuille et  $V_t$  la valeur du portefeuille à l'instant  $t$ :  $V_t = \delta_t S_t + B_t$ . En temps discret (e.g., si le trading a lieu uniquement aux dates  $(t_i)_{i=1}^N$ ), la condition d'autofinancement s'écrit:

$$\begin{aligned} B_{t_i-} + \delta_{t_i-} S_{t_i} &= B_{t_i} + \delta_{t_i} S_{t_i} \\ \Rightarrow e^{r(t_i-t_{i-1})} B_{t_{i-1}} + \delta_{t_{i-1}} S_{t_i} &= B_{t_i} + \delta_{t_i} S_{t_i} \\ V_{t_i} - V_{t_{i-1}} &= (e^{r(t_i-t_{i-1})} - 1) B_{t_{i-1}} + \delta_{t_{i-1}} (S_{t_i} - S_{t_{i-1}}) \\ &= (e^{r(t_i-t_{i-1})} - 1) (V_{t_{i-1}} - \delta_{t_{i-1}} S_{t_{i-1}}) + \delta_{t_{i-1}} (S_{t_i} - S_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

En passant à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on trouve

$$dV_t = (V_t - \delta_t S_t) r dt + \delta_t dS_t$$

Supposons que  $V_t = C(t, S_t)$  pour une fonction régulière  $C(t, S)$ . Alors  $dV_t = dC(t, S_t)$  et la formule d'Itô implique:

$$\begin{aligned} dC(t, S_t) &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} d\langle S \rangle_t \\ &= \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S} dW_t + \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt \end{aligned}$$

Pour que  $dV_t = dC(t, S_t)$ , nécessairement

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} \\ rC(t, S) &= \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Si une fonction quelconque  $C(t, S)$  satisfait (2.1), le portefeuille avec  $\delta_t = \frac{\partial C}{\partial S}$  et  $B_t = C(t, S_t) - \delta_t S_t$  est autofinçant. Par absence d'arbitrage, ceci implique que le prix d'une option de payoff  $h(S_T)$  est donné par l'unique solution de (2.1) avec condition finale  $C(T, S) = h(S)$ .

### 2.1.2 Evaluation risque-neutre

Sous la probabilité historique  $P$ ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Soit  $Q$  une probabilité équivalente à  $P$  définie par:

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left( -\frac{\mu - r}{\sigma} W_t - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} t \right)$$

Alors par le théorème de Girsanov  $\hat{W}_t := W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$  est un mouvement Brownien sous  $Q$  et

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\hat{W}_t.$$

Posons  $\tilde{C}(t, S_t) := e^{-r(T-t)} E^Q[h(S_T) | S_t]$ . Alors  $e^{-rt} \tilde{C}(t, S_t)$  est une  $Q$ -martingale. Une application de la formule d'Itô donne

$$e^{rt} d(e^{-rt} \tilde{C}) = \left( -r\tilde{C} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + rS_t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S} d\hat{W}_t,$$

ce qui montre que  $\tilde{C}$  est une solution de (2.1). De l'unicité de solution on déduit que le prix d'une option de payoff  $h(S_T)$ , solution de (2.1), dans le modèle de Black et Scholes est donné par

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E^Q[h(S_t e^{r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\hat{W}_{T-t}}) | S_t] \quad (2.2)$$

Ceci est un cas particulier du célèbre *théorème fondamental de valorisation des actifs financiers*: [33, 14] qui dit que le marché est sans opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe une probabilité  $Q$  (probabilité risque-neutre), équivalente à la probabilité historique  $P$  tel que les prix actualisés de tous les actifs sont des martingales.

### 2.1.3 Formule de Black et Scholes

Pour une option Call européenne  $h(S_T) = (S_T - K)^+$ , et (2.2) devient (le calcul de l'espérance est laissé au lecteur)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Call}(t, S_t, T, K) &= e^{-r(T-t)} E^Q[(S_t e^{r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\hat{W}_{T-t}} - K)^+ | S_t] \\ &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log \left( \frac{S_t}{K e^{-r(T-t)}} \right) + \frac{1}{2} \sigma\sqrt{T-t}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Pour couvrir une Call Européenne de maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$ , il faut donc

- Acheter  $\delta_t = \frac{\partial \text{Call}(t, S_t, T, K)}{\partial S} \equiv N(d_1)$  actions
- Placer  $B_t = \text{Call}(t, S_t, T, K) - \delta_t S_t$  à la banque

La formule de Black-Scholes est vraie dans le cadre plus général où  $S$  est la valeur d'un portefeuille autofinçant quelconque. Par conséquent, dans la situation où le sous-jacent n'est pas un portefeuille autofinçant (si c'est un taux d'intérêt où une action versant des dividendes), pour établir la formule de pricing d'un call, il faut calculer la valeur  $V_t$  du portefeuille autofinçant qui est égal au sous-jacent à l'échéance, et remplacer  $S_t$  par  $V_t$  partout dans la formule (2.3). La section suivante développe cette approche dans le cas d'options sur un actif versant des dividendes.

### 2.1.4 Option sur un actif versant des dividendes

Pour les actions, on utilise en général les prévisions de dividendes calculées par les analystes financiers et publiées par les fournisseurs de données. Pour les indices, étant donné que le nombre d'actions est typiquement élevé et ils paient des dividendes quasiment en continu, on utilise généralement l'approximation de taux de dividende continu, qui consiste à dire que le montant de dividende payé entre  $t$  et  $t + dt$  est égal à  $qS_t dt$ . Si  $Y$  est un portefeuille autofinçant contenant  $\delta_t$  actions, alors

$$dY_t = \delta_t dS_t + q\delta_t S_t dt.$$

D'un autre côté, la formule d'Itô donne (puisque  $\delta$  est croissant et donc a variation finie)

$$dY_t = \delta_t dS_t + S_t d\delta_t.$$

Ceci implique  $d\delta_t = q\delta_t dt$  et donc  $\delta_t = \delta_0 e^{qt}$ : un portefeuille autofinçant qui contient  $e^{-qt}$  actions à l'instant  $t = 0$ , va contenir exactement une action à l'instant  $t$ . La formule de Black-Scholes est alors vraie dans sa forme habituelle pour le processus  $Y_t$  et si on la réécrit en terme de  $S_t$ , elle devient

$$\text{Call}(t, S_t, T, K) = S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.4)$$

$$\text{avec } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{S_t e^{-q(T-t)}}{K e^{-r(T-t)}}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \quad (2.5)$$

autrement dit, nous avons remplacé  $S_t$  par  $S_t e^{-q(T-t)}$  partout dans la formule.

### 2.1.5 Exemples de couverture en delta

Figure 2.1 montre deux exemples d'évolution de portefeuille de couverture et de l'option qu'on cherche à répliquer dans le modèle de Black-Scholes avec rebalancement très fréquent (8 fois par jour) du portefeuille de couverture. De façon générale, à la fin de chaque trajectoire, le delta est égale soit à 0 si l'option termine hors de la monnaie soit à 1 si l'option termine dans la monnaie.

Figure 2.2 montre l'effet d'une fréquence de rebalancement moins élevée: à gauche, le portefeuille est recalculé une fois par jour et à droite la couverture reste statique pendant toute la période (2 mois), ce qui conduit à une grande erreur de réplification.

Enfin, figure 2.3 montre que même en cas de rebalancement quasi-continu, un saut dans le prix ne peut pas être pris en compte par la couverture en delta et conduit à une erreur de réplification.

### 2.1.6 L'utilisation du modèle de Black-Scholes dans les marchés d'options

Le modèle de Black-Scholes reste l'outil fondamental des traders d'options qui se rendent toutefois bien compte des nombreuses inconsistances de ce modèle et de l'impossibilité de l'appliquer tel quel aux marchés d'options. Ce modèle est utilisé comme une approximation de premier ordre au fonctionnement des marchés, et il est ensuite corrigé avec des nombreuses outils et techniques de trading. L'attitude des praticiens vis à vis le modèle de Black-Scholes est grossièrement résumée par le tableau 2.1.

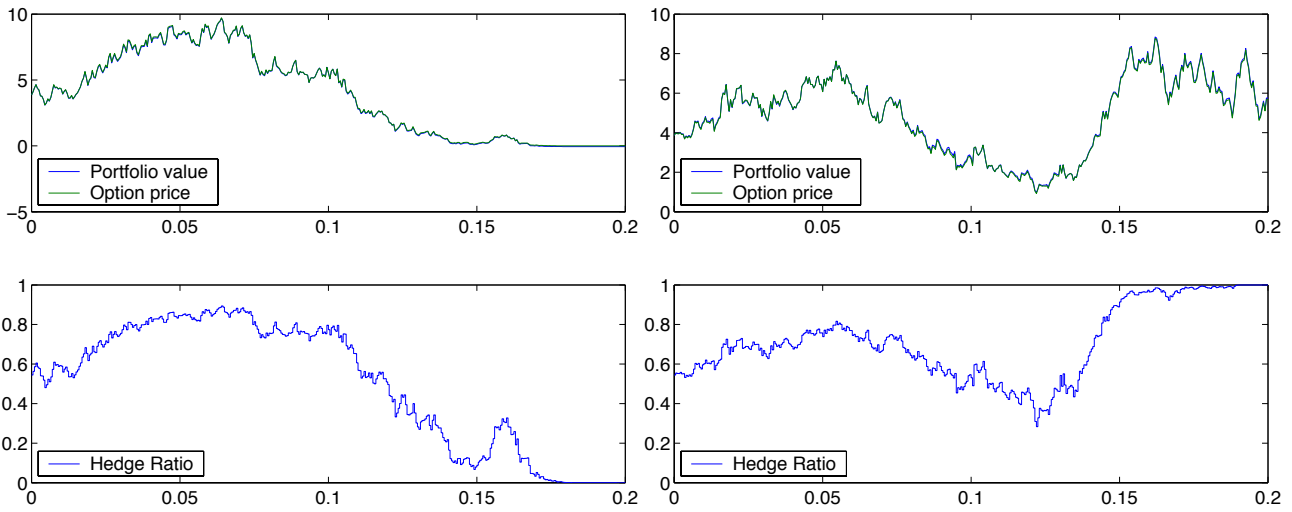


Figure 2.1: Rebalancement continu du portefeuille de couverture (8 fois par jour). Gauche: P&L final =  $-0.05$ . Droite: P&L final =  $0.08$ .

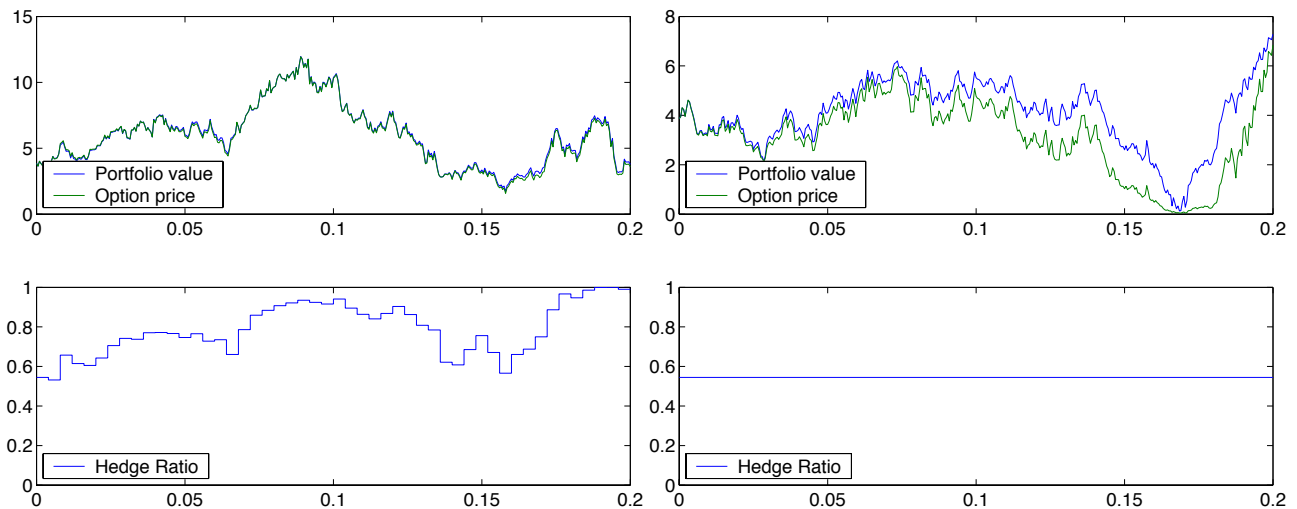


Figure 2.2: Gauche: rebalancement journalier, P&L final =  $0.18$ . Droite: couverture statique en delta, P&L final =  $0.44$ .

### Implication du modèle

- Le risque d’une option peut être complètement éliminé par une position en actions.
- La quantité d’actions à acheter pour couvrir une option est  $\delta_t = \frac{\partial C}{\partial S}$
- Le paramètre fondamental caractérisant une option est sa volatilité  $\sigma$
- La volatilité est la même pour toutes les options sur le même sous-jacent et égale à l’écart type du sous-jacent.

### Acceptée par les praticiens?

- Non, car le rébalancement continu est impossible et le modèle est misspecifié
- Oui, c’est la stratégie la plus fondamentale
- Oui, les volatilités des options sont souvent cotées avec leur prix
- Non, la volatilité est calculée séparément pour chaque option

Table 2.1: Attitude des praticiens vis à vis la formule de Black-Scholes.

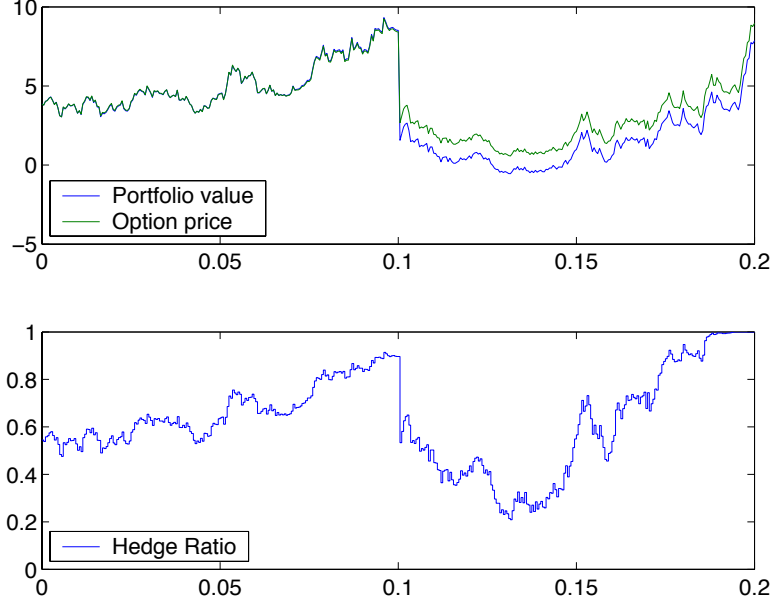


Figure 2.3: Effet d'un saut sur la stratégie de couverture. Rebalancement continu. P&L final = 1.10. Taille du saut : 7%.

## 2.2 Compléments sur le modèle de Black-Scholes

### 2.2.1 Couverture en temps discret

Dans cette section nous nous mettons dans le cas  $r = 0$  (il est toujours possible de se ramener à cette situation en travaillant avec des quantités actualisées). Nous supposons que le rebalancement de portefeuille de couverture à lieu aux instants  $ih$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Son évolution s'écrit alors

$$dV_t = \frac{\partial C(h[t/h], S_{h[t/h]})}{\partial S} dS_t,$$

où  $[x]$  dénote la partie entière de  $x$ . D'un autre coté, l'évolution du prix de l'option est

$$dC_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} dS_t.$$

Pour l'erreur de couverture  $\varepsilon_t \equiv C_t - V_t$  nous avons alors

$$d\varepsilon_t = \left( \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} - \frac{\partial C(h[t/h], S_{h[t/h]})}{\partial S} \right) dS_t.$$

Puisque  $\frac{\partial C}{\partial S}$  est borné (dans le cas d'une option call ou put européenne),  $(\varepsilon_t)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale d'espérance nulle. Introduisons l'erreur de couverture renormalisée  $\varepsilon_t^* = \frac{1}{\sqrt{h}} \varepsilon_t$ . Il est alors facile de démontrer que  $E[(\varepsilon_T^*)^2]$  converge vers une limite bien définie (voir aussi [54]).

**Proposition 1.** *Supposons que le prix de l'action suit le modèle Black-Scholes avec  $r = 0$ , et que le pay-off de l'option est tel que  $\frac{\partial C}{\partial S}$  est borné. Alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} E^{\mathbb{Q}}[(\varepsilon_T^*)^2] = E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\partial^2 C(t, S_t)}{\partial S^2} \right)^2 S_t^4 \sigma^4 dt \right]$$

dès que l'espérance dans la partie droite est finie.

*Preuve.* Dans cette démonstration,  $E$  denote l'espérance sous la probabilité risque-neutre  $E^Q$ . Soit  $\delta_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S}$ ,  $\phi(t) = h[t/h]$  et  $\psi(t) = h + \phi(t)$ . En utilisant la bornitude de  $\delta$ , par isométrie d'Itô on a:

$$E[(\varepsilon_T^*)^2] = \frac{1}{h} E \left[ \int_0^T (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^2 \sigma^2 S_t^2 dt \right]$$

En utilisant l'intégration par parties entre  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  puis la formule d'Itô ceci devient

$$\begin{aligned} E[(\varepsilon_T^*)^2] &= \frac{\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) d((\delta_t - \delta_{\phi(t)})^2 S_t^2) \right] \\ &= \frac{2\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) (\delta_t - \delta_{\phi(t)}) S_t^2 d\delta_t \right] + \frac{2\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^2 S_t dS_t \right] \\ &+ \frac{\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) S_t^4 \left( \frac{\partial^2 C(t, S_t)}{\partial S^2} \right)^2 \sigma^2 dt \right] \\ &+ \frac{\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^2 S_t^2 \sigma^2 dt \right] + \frac{4\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) (\delta_t - \delta_{\phi(t)}) S_t^3 \sigma^2 \frac{\partial^2 C(t, S_t)}{\partial S^2} dt \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

En utilisant le fait que  $0 \leq \frac{\psi(t)-t}{h} \leq 1$ , que  $\delta_t$  est borné et  $\delta_{\phi(t)} \rightarrow \delta_t$  quand  $h \rightarrow 0$ , et le théorème de convergence dominée, nous obtenons immédiatement que les deux termes sur la dernière ligne ci-dessus convergent vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$ . De plus, pour toute fonction intégrable mesurable  $f$ ,

$$\int_0^T \frac{\psi(t) - t}{h} f(t) dt \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^T f(t) dt.$$

Avec le théorème de convergence dominée, ceci donne

$$\frac{\sigma^4}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) S_t^4 \left( \frac{\partial^2 C(t, S_t)}{\partial S^2} \right)^2 dt \right] \rightarrow \frac{\sigma^4}{2} E \left[ \int_0^T S_t^4 \left( \frac{\partial^2 C(t, S_t)}{\partial S^2} \right)^2 dt \right]$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ . Il reste à traiter les deux termes de la 2ème ligne de (2.6). Pour le 2ème de ces termes, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^2 S_t dS_t \right] \right| &\leq \frac{2\sigma^2}{h} E \left[ \left( \int_0^T (\psi(t) - t) (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^2 S_t dS_t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t)^2 (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^4 S_t^4 \sigma^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sigma^4 E \left[ \int_0^T (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^4 S_t^4 dt \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

par le théorème de convergence dominée. Passons au 1er terme. En utilisant la formule d'Itô et l'équation de Black-Scholes, on obtient

$$d\delta_t = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS_t + \frac{\partial^2 C}{\partial \partial S \partial t} dt + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^3 C}{\partial S^3} dt = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS_t - \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S_t dt.$$



On a donc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2\sigma^2}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t)(\delta_t - \delta_{\phi(t)}) S_t^2 d\delta_t \right] \right| \\ & \leq \frac{2\sigma^4}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t) |\delta_t - \delta_{\phi(t)}| S_t^3 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right| dt \right] + \frac{2\sigma^2}{h} E \left[ \left( \int_0^T (\psi(t) - t)(\delta_t - \delta_{\phi(t)}) S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS_t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2\sigma^4 E \left[ \int_0^T |\delta_t - \delta_{\phi(t)}| S_t^3 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right| dt \right] + \frac{2\sigma^4}{h} E \left[ \int_0^T (\psi(t) - t)^2 (\delta_t - \delta_{\phi(t)})^2 S_t^4 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

en utilisant convergence dominée une dernière fois.  $\square$

**Exercice 2.** En utilisant la forme explicite du gamma Black-Scholes

$$\frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}},$$

montrer que le résultat précédent s'applique au cas d'une option call.

On peut également démontrer [34] que le processus  $(\varepsilon_t^*)$  converge en distribution vers un processus bien identifié:

$$(\varepsilon_t^*) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{d} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_0^t \frac{\partial^2 C(u, S_u)}{\partial S^2} \sigma^2 S_u^2 dW'_u \right),$$

où  $W'$  est un mouvement Brownien indépendant de  $W$ . Ces deux résultats ont plusieurs implications importantes:

- L'erreur de couverture est proportionnelle à la racine du pas de temps  $\sqrt{h}$ . Pour diviser l'erreur par 2 il faut donc rébalancer le portefeuille 4 fois plus souvent. Ce phénomène est illustré par le graphique de gauche de fig. 2.4.
- L'erreur de couverture est centrée et indépendante de la direction du mouvement du sous-jacent.
- L'erreur de couverture est d'autant plus grande que le gamma de l'option  $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$  est grande. Le gamma Black-Scholes d'une option call est tracé sur le graphique de droite de fig. 2.4 pour des maturités différentes. On voit que les options les plus difficiles à couvrir sont les options ATM proches de l'expiration.

## 2.2.2 Couverture en delta-gamma

Nous avons vu que pour réduire l'erreur de couverture due à la discrétisation il faut diminuer le gamma du portefeuille. Un moyen de construire un portefeuille gamma-neutre est de rajouter une option ou un autre actif suffisamment liquide dont le gamma compense celui de l'option qu'on cherche à couvrir. Le prix de cet actif de couverture sera noté par  $C_0$ .

Supposons que le portefeuille de couverture contient  $\delta_t$  actions et  $\gamma_t$  actifs  $C_0$ , où

$$\gamma_t = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} / \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2}, \quad \delta_t = \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C_0}{\partial S} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} / \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2}.$$

Il est facile de voir que le gamma et le delta de ce portefeuille coïncident avec le gamma et le delta de l'option  $C$  que l'on cherche à couvrir. Fig. 2.5 montre qu'un portefeuille couvert en gamma-delta reste insensible aux mouvements du sous-jacent d'ampleur beaucoup plus grande que le portefeuille couvert en delta seulement.

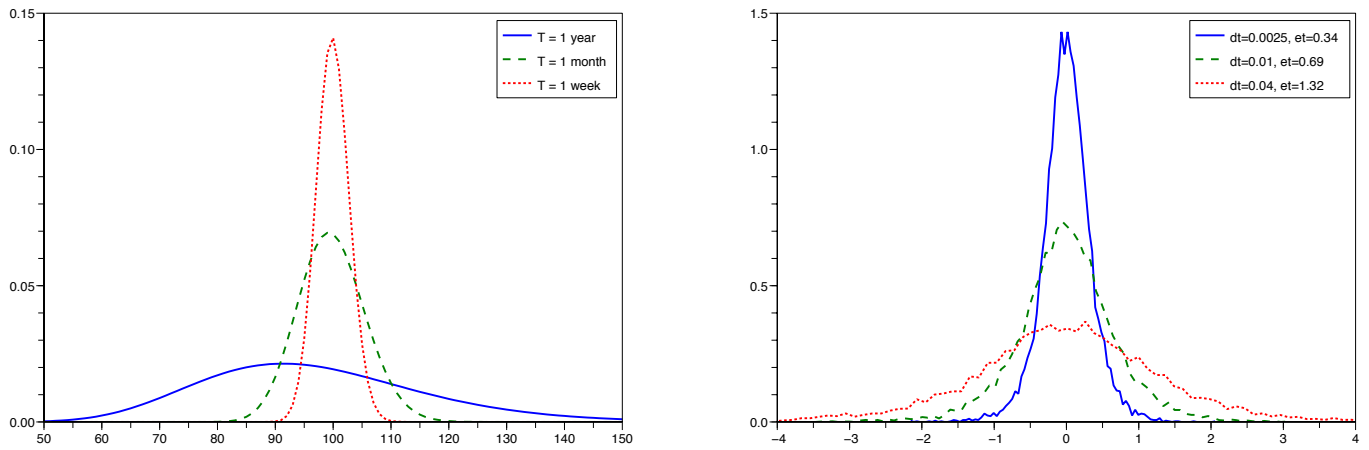


Figure 2.4: Gauche: gamma Black-Scholes d'une option call pour maturités différentes. Droite: histogrammes de l'erreur de couverture pour différentes fréquences de rébalancement.

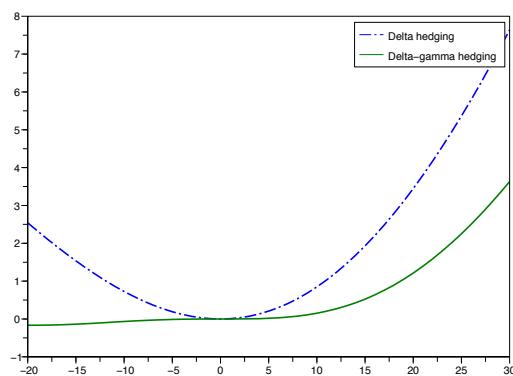


Figure 2.5: Sensibilité des positions couvertes en delta-gamma et en delta aux changements du prix de sous-jacent.

### 2.2.3 Robustesse de la formule de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes est souvent utilisée dans le marché même pour les actifs dont la volatilité n'est pas constante ni même déterministe. Cette pratique est partiellement justifiée par la propriété connue sous le nom de "robustesse de la formule de Black-Scholes": même si la vraie volatilité du sous-jacent est stochastique, la formule de Black-Scholes peut être utilisée pour calculer les bornes supérieures / inférieures du prix, pourvu que la volatilité constante utilisée majore / minore la vraie volatilité.

Supposons que le prix d'action suit

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t,$$

où  $\sigma_t$  est un processus stochastique, et que l'agent calcule son portefeuille de couverture en utilisant la formule Black-Scholes avec volatilité constante  $\Sigma$ . L'évolution du portefeuille de l'agent est

$$dV_t = rV_t dt + \Delta_{BS}(t, S_t)(dS_t - rS_t dt), \quad V_0 = C_{BS}(0, S_0).$$

L'erreur finale de couverture est donnée par la différence entre  $V_T$  et le payoff de l'option:

$$\varepsilon_T = V_T - H_T = V_T - C_{BS}(T, S_T).$$

En appliquant la formule d'Itô on a alors

$$dC_{BS}(t, S_t) = \left( \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} dS_t,$$

mais  $C_{BS}(t, S)$  en tant qu'une fonction satisfait l'EDP de Black-Scholes:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} = r \left( C_{BS} - S \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} \right).$$

En rassemblant les trois équations, on trouve

$$\varepsilon_T = V_T - H_T = \frac{1}{2} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma_t^2) S_t^2 dt. \quad (2.7)$$

Si  $\Sigma \geq \sigma_t$  p.s., nous avons  $V_T \geq H_T$  p.s.: le portefeuille de couverture Black-Scholes domine le prix de l'option et donc, le prix Black-Scholes domine le vrai prix.

## 2.3 La volatilité implicite

Dans le modèle de Black et Scholes l'unique paramètre inobservable est la volatilité. La fonction,  $\sigma \mapsto C^{BS}(\sigma)$  qui à une valeur de volatilité associe le prix Black-Scholes correspondant (voir Figure 2.6), vérifie

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} C^{BS}(\sigma) = (S_t - K e^{-r(T-t)})^+ \quad \lim_{\sigma \uparrow \infty} C^{BS}(\sigma) = S_t \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} = S n(d_1) \sqrt{T-t} > 0. \quad (2.9)$$

Ceci implique que l'équation  $C^{BS}(\sigma) = C$  a une unique solution pour toute valeur de  $C$  vérifiant les contraintes d'arbitrage

$$(S_t - K e^{-r(T-t)})^+ < C < S_t$$

Cette solution peut facilement être calculée en utilisant l'algorithme de bisection pour la fonction  $x \in (0, 1) \mapsto C^{BS}\left(\frac{x}{1-x}\right)$  (le changement de variable permet de se ramener à un intervalle borné).

Le choix du nombre d'itérations  $N$  dépend de la précision souhaitée: par exemple,  $N = 20$  donnera une précision de l'ordre de  $10^{-6}$ . La convergence peut être accélérée par l'algorithme de Newton

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C - C^{BS}(\sigma_n)}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)},$$

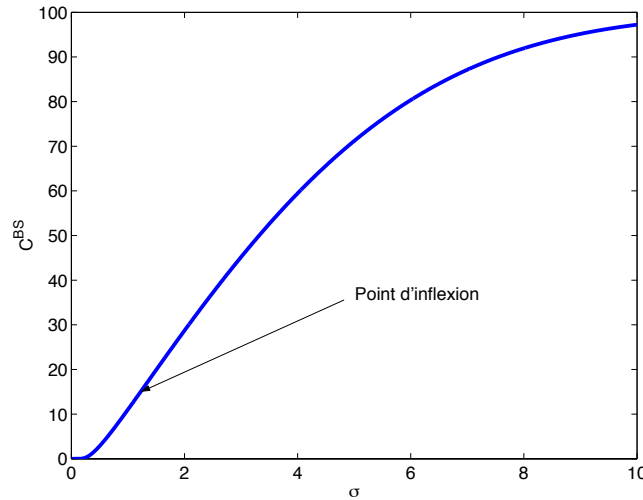


Figure 2.6: Prix Black-Scholes d'une option en fonction de sa volatilité implicite.

---

**Algorithm 1**  $\sigma = \text{Volatilité Implicite}(C)$

---

```

 $x_0 = 0$ 
 $y_0 = 1$ 
for  $i = 1 \rightarrow N$  do
   $z_i := \frac{1}{2}(x_{i-1} + y_{i-1})$ 
  if  $C > C^{BS}(\frac{z_i}{1-z_i})$  then
     $x_i := z_i$ 
     $y_i := y_{i-1}$ 
  else
     $x_i := x_{i-1}$ 
     $y_i := z_i$ 
  end if
end for
 $z := \frac{x_N + y_N}{2}$ 
 $\sigma := \frac{z}{1-z}$ 

```

---

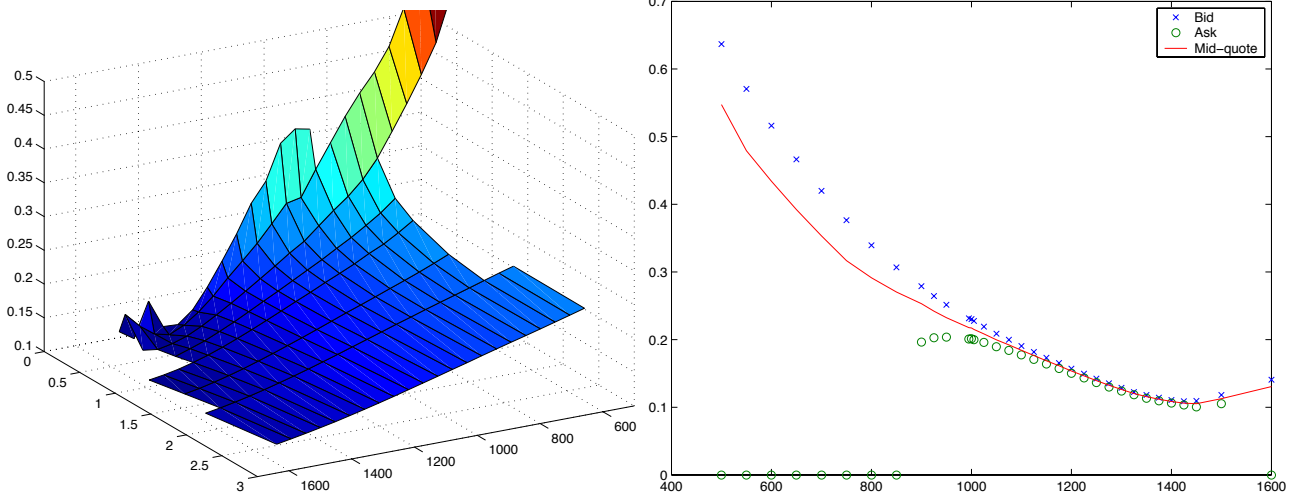
pour lequel 3 – 4 itérations sont normalement suffisantes. Cependant, lorsque  $C$  est trop proche des bornes d'arbitrage, la dérivée  $\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)$  devient trop petite, ce qui peut conduire à des instabilités numériques. Dans ce cas il est préférable d'utiliser la méthode de bisection.

La solution  $I(C)$  de l'équation  $C^{BS}(\sigma) = C$ , où  $C$  est le prix d'une option européenne observé sur le marché s'appelle la *volatilité implicite* de cette option. Le modèle de Black-Scholes implique que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique (écart type des rendements annualisé) du sous-jacent. Cependant, lorsqu'on calcule  $I$  à partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que

- La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité du sous-jacent.
- Les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

Le graphique gauche du fig. 2.3 trace les volatilités implicites des options sur l'indice S&P 500 en fonction de leur strike et maturité observés le 23 janvier 2006. On constate que

- Pour presque tous les strikes, la volatilité implicite décroît en fonction de strike (phénomène de *skew*).



- Pour des très grands strikes on observe parfois une légère remontée de la volatilité implicite (phénomène du *smile*).
- Les phénomènes de smile et skew sont le plus prononcés pour les options de courte maturité; la courbe de volatilité implicite en fonction de strike s'aplatit pour les grandes maturités.

La différence entre la volatilité implicite et la volatilité historique du sous-jacent peut s'expliquer par le fait que la couverture d'une option est plus chère en réalité que dans le modèle de Black-Scholes, à cause, en particulier, des frais de transaction et de la nécessité de couvrir les sources de risque non pris en compte par ce modèle (e.g. le risque de volatilité). Le phénomène de skew est dû au fait que le modèle de Black-Scholes sous-estime la probabilité d'un krach boursier ou d'un grand mouvement de prix en général. Le traders corrigent cette probabilité en augmentant les volatilités implicites des options loin de la monnaie. Finalement, le smile peut être expliqué par les primes de liquidité qui sont plus élevées pour les options loin de la monnaie. Le graphique droit du fig. 2.3 montre que les volatilités implicites des options loin de la monnaie sont presque exclusivement expliquées par les prix Bid (d'achat) qui ont des primes plus élevées pour ces options à cause d'une offre moins importante.

### 2.3.1 Rôle de la volatilité implicite dans les marchés d'options

La volatilité implicite est très utilisée pour le calcul des ratios de couverture des options européennes. Pour toute option, indépendamment du modèle utilisé on peut écrire:

$$C(t, S_t) = C^{BS}(t, S_t, I),$$

où  $I$  est la volatilité implicite de cette option. Si la volatilité implicite ne dépend pas du  $S_t$  mais seulement du strike et du temps, on pourrait écrire

$$\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} = \frac{\partial C^{BS}(t, S_t)}{\partial S},$$

le delta de l'option est donc égal à son delta Black-Scholes. L'absence de dépendance de la volatilité implicite par rapport au sous-jacent a été appelée *le régime sticky strike* par Derman [15]. En réalité cette condition est rarement vérifiée, et le changement de  $I$  avec le sous-jacent doit être pris en compte:

$$\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} = \frac{\partial C^{BS}(t, S_t)}{\partial S} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial S}. \quad (2.10)$$

Cette divergence entre le delta d'une option et son delta Black-Scholes est souvent traité comme un nouveau source de risque, *risque de vega*<sup>1</sup>. Il est souvent géré en rendant le portefeuille *vega-neutre*. Pour un portefeuille

<sup>1</sup>Vega n'est pas une lettre grecque mais simplement un joli nom pour la dérivée du prix Black-Scholes par rapport à la volatilité implicite ou plus généralement la dérivée du prix d'une option par rapport à la volatilité  $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$

d'options européennes ceci signifie que la somme des dérivées de chaque option par rapport à sa volatilité implicite doit être nulle  $\sum_{k=1}^N \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} |_{\sigma=I_k} = 0$ . Si maintenant on suppose que les volatilités implicites des différents strikes et maturités varient de la même façon avec le sous-jacent —  $\frac{\partial I}{\partial S}$  ne dépend pas de  $K$  — le risque dû au changement de volatilité implicite sera totalement couvert.

Une autre approche pour la prise en compte du deuxième terme dans (2.10) consiste à modifier le delta d'une option en faisant des hypothèses appropriés sur l'évolution du smile avec le sous-jacent. Par exemple, dans le régime *sticky delta* ou *sticky moneyness* de Derman, on suppose que la volatilité implicite dépend du ratio  $K/S$  mais pas de ces deux variables séparément. En posant  $I = I(K/S)$ , on a alors

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C^{BS}}{\partial S} - \frac{\partial C^{BS}}{\partial I} \frac{K}{S^2} I'.$$

Comme en général la volatilité décroît avec le strike (pour les options proches de la monnaie), l'hypothèse de sticky delta implique  $\frac{\partial C}{\partial S} > \frac{\partial C^{BS}}{\partial S}$ : le delta d'une option est supérieur à son delta Black-Scholes.

### 2.3.2 Prise en compte des dividendes dans le calcul de la volatilité implicite

Si on utilise la formule de Black-Scholes (2.3) pour le calcul de la volatilité implicite, pour certains indices (e.g. le DAX) on obtient des résultats raisonnables, mais pour d'autres (CAC 40 ou S&P 500) on obtient des valeurs aberrantes (trop petites), surtout pour des grandes maturités. Ceci est dû à la différence des méthodes de calcul des indices: le DAX est un indice de performance, il peut être vu comme un portefeuille autofinçant d'actions dans lequel les dividendes payés par les actions sont immédiatement réinvestis, ou encore comme une grosse action ne payant pas de dividende. En revanche, CAC 40, S&P 500 etc. sont les indices dits composites, c'est-à-dire, leur valeur est tout le temps égale à la moyenne pondérée des prix des constituants. Si les titres constituant un tel indice paient des dividendes, ceci diminue leur valeur et la valeur de l'indice.

La formule (2.4) implique que la relation de parité Call-Put pour les indices comme CAC 40 prend la forme

$$\text{Call}(S_0, T, K) - \text{Put}(S_0, T, K) = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT},$$

ce qui permet d'estimer la valeur de  $q$  par une régression linéaire de

$$\log\{\text{Call}_i - \text{Put}_i + K_i e^{-r_i T_i}\}$$

sur  $T_i$ . La volatilité implicite peut alors être calculée en inversant la formule (2.4).

### 2.3.3 Une interpretation de la volatilité implicite

En prenant l'espérance actualisé des deux cotés de (2.7) sous la probabilité risque-neutre du marché, on trouve:

$$C_{BS}^\Sigma(0, S_0) - C(0, S_0) = \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} E \left[ (\Sigma^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}^\Sigma(t, S_t)}{\partial S^2} \right].$$

Lorsque  $\Sigma$  est égal à la volatilité implicite de l'option, le coté gauche s'annule. En séparant les termes, on a donc:

$$\Sigma^2 = \frac{\int_0^T e^{-rt} E \left[ \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}^\Sigma(t, S_t)}{\partial S^2} \right]}{\int_0^T e^{-rt} E \left[ S_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}^\Sigma(t, S_t)}{\partial S^2} \right]}, \quad (2.11)$$

ce qui montre que la volatilité implicite est égale à une moyenne pondéré des volatilités locales sur la durée de vie de l'option. Une représentation similaire est donnée dans [26] et [40].

## 2.4 Complément: formule de Garman-Kohlhagen et cotation d'options sur taux de change

Si le sous-jacent de l'option est un taux de change  $X_t$ , alors la valeur d'un portefeuille autofinçant qui rapporte  $X_T$  à l'échéance de l'option  $T$  est égale au prix d'un zéro-coupon étranger converti en monnaie domestique,

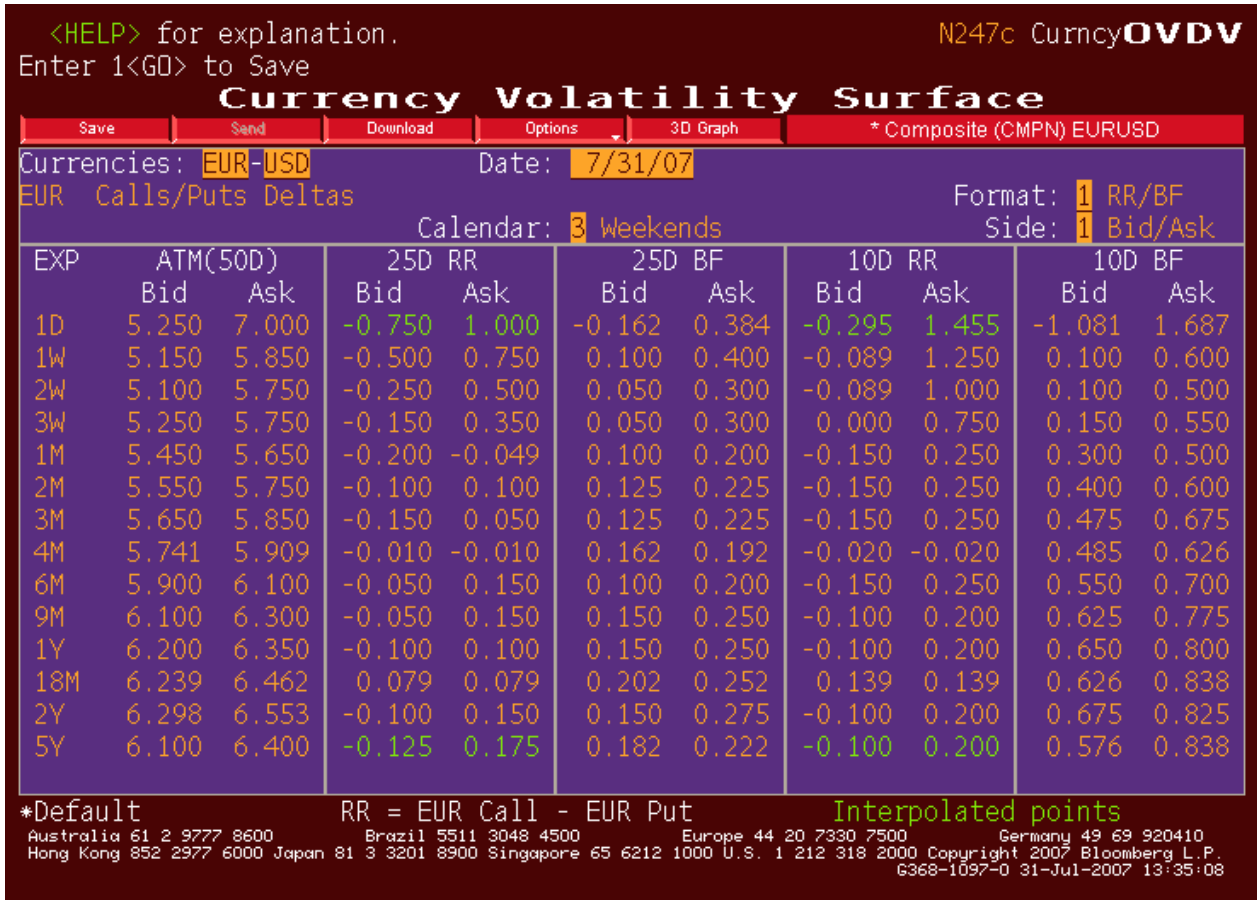


Figure 2.7: Une page Bloomberg avec les cotations des options sur taux de change.

donc, dans le cas de taux déterministes,

$$V_t = e^{-\int_t^T r_s^f ds} X_t,$$

où  $r^f$  est le taux court étranger. La formule de Black-Scholes, qui est alors connue sous le nom de formule de Garman-Kohlhagen [24], prend la forme

$$\text{Call}(t, X_t, T, K) = X_t e^{-\int_t^T r_s^f ds} N(d_1) - K e^{-\int_t^T r_s ds} N(d_2) \quad (2.12)$$

$$\text{avec } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{X_t e^{-\int_t^T r_s^f ds}}{K e^{-\int_t^T r_s ds}}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \quad (2.13)$$

La cotation d'options sur taux de change est sensiblement différente de celles sur actions et indices: alors que dans les marchés *equity*, on affiche les prix de calls et de puts en fonction de leur prix d'exercice, pour les options FX on affiche la volatilité implicite à la monnaie (ATM vol) ainsi que la volatilité implicite des montages *butterfly* (qui représente la convexité du smile de volatilité) ou *risk-reversal* (qui représente la pente du smile) en fonction de leur delta (fig. 2.7). L'utilisation du delta, du volatilité implicite, et des montages qui correspondent aux principaux facteurs de risque associés au smile de volatilité permet de rendre l'affichage plus stable dans le temps et plus lisible pour les traders.

**Cotation en delta** Le delta de l'option dans le modèle de Garman-Kohlhagen est

$$e^{-\int_0^T r_t^f dt} N(d_1), \quad d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\left(\frac{X_0 e^{-\int_0^T r_t^f dt}}{K e^{-\int_0^T r_t dt}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T},$$

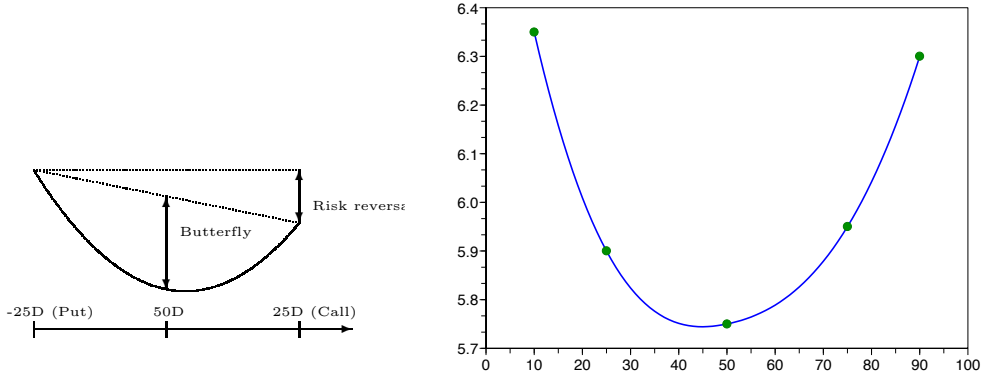


Figure 2.8: A gauche: représentation graphique des Butterfly et Risk Reversal. A droite: smile de volatilité pour les options sur EUR/USD de maturité 3 mois.

où  $X_0$  est le taux de change courant, mais pour la cotation on utilise  $N(d_1)$  pour que le “delta” soit compris exactement entre 0 et 1 pour toutes les maturités. Il y a donc une bijection entre le delta de l’option et son stike. L’option “50 $\Delta$ ” correspond à  $N(d_1) = 0.5 \iff d_1 = 0$  et a le stike

$$K_{50\Delta} = X_0 e^{\int_0^T (r_t - r_t^f + \frac{\sigma^2}{2}) dt}.$$

De même, pour une option “ $x\Delta$ ” on a

$$K_{x\Delta} = X_0 e^{\int_0^T (r_t - r_t^f + \frac{\sigma^2}{2}) dt} e^{-\sigma\sqrt{T}N^{-1}(x)}.$$

**Risk reversal et butterfly** Les “volatilités” du risk-reversal et du butterfly ne sont pas en fait des volatilités mais simplement les mesures de la pente et de la convexité du smile respectivement. Il sont calculés à partir de volatilités des calls et des puts hors la monnaie avec les formules suivantes:

$$BB_{25\Delta} = \frac{\sigma_{25\Delta c} + \sigma_{-25\Delta p}}{2} - \sigma_{50\Delta}, \quad RR_{25\Delta} = \sigma_{25\Delta c} - \sigma_{-25\Delta p}$$

Ces formules sont illustrées sur le graphique de gauche de fig. 2.8. Pour reconstituer le smile de volatilité implicite, on peut recalculer les volatilités des options call et put hors la monnaie:

$$\sigma_{25\Delta c} = BB_{25\Delta} + \sigma_{50\Delta} + \frac{RR_{25\Delta}}{2}, \quad \sigma_{-25\Delta p} = BB_{25\Delta} + \sigma_{50\Delta} - \frac{RR_{25\Delta}}{2},$$

puis les interpoler avec une méthode d’interpolation convenable. Remarquons que le butterfly est toujours positif, mais le risk reversal peut changer de signe sur le FX, contrairement aux marchés d’actions, où il est presque toujours négatif.



## Chapitre 3

# Les modèles à volatilité locale et la diffusion implicite

### 3.1 Modèles à volatilité locale

Dans la section 2.3 nous avons vu que le modèle de Black-Scholes à volatilité constante ne peut pas reproduire l'ensemble des prix d'options observés sur le marché pour un sous-jacent donné, car leur volatilité implicite varie en fonction du strike et de la maturité. Pour prendre en compte le smile du marché tout en restant dans le cadre markovien et complet (un seul facteur de risque) une solution naturelle est de modéliser la volatilité comme une fonction déterministe du temps et de la valeur du sous-jacent:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t, \\ \frac{dB_t}{B_t} &= r_t dt.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dans ces équations, le taux d'intérêt  $r_t$  peut aussi dépendre de  $t$  et de  $S_t$ , et la dérive  $\mu_t$  peut être un processus prévisible général car on peut s'en débarrasser grâce à l'évaluation risque neutre.

Par le même argument d'autofinancement que dans le modèle Black-Scholes (voir section 2.1), le prix d'une option qui paie  $h(S_T)$  à l'instant  $T$  satisfait

$$r_t C(t, S) = \frac{\partial C}{\partial t} + r_t S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, \quad C(T, S) = h(S),$$

et le portefeuille autofinçant de couverture contient  $\delta_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S}$  actions et  $B_t = C(t, S_t) - \delta_t S_t$  en cash. L'équation de pricing garde alors la même forme que dans le modèle de Black-Scholes mais on ne peut plus en déduire une formule explicite car la volatilité dépend maintenant du sous-jacent.

Par analogie exacte au modèle de Black-Scholes, le modèle de volatilité locale correspond à un marché complet (le seul facteur de risque est le sous-jacent) et l'unique probabilité risque-neutre (si elle existe) est donnée par

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left( - \int_0^t \frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s} dW_s - \int_0^t \frac{(\mu_s - r_s)^2}{2\sigma_s^2} ds \right).\tag{3.2}$$

Sous cette probabilité,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t^Q.\tag{3.3}$$

Pour assurer l'existence de la probabilité risque-neutre, il faut alors démontrer que (3.2) est bien une martingale. Supposons qu'il existe un processus de *prime de risque*  $\lambda_t$  tel que  $\mu_t = r_t + \lambda_t \sigma_t$  et

$$E[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds}] < \infty.$$

Par exemple, il suffit que  $\lambda$  soit bornée. Alors le critère de Novikov (théorème 9 de l'annexe) garantit que

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds\right)$$

est une martingale uniformément intégrable et la probabilité risque-neutre  $Q$  est bien définie. Sous cette probabilité,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(t, S_t) d\hat{W}_t \quad \text{et} \quad C(t, S) = E^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} h(S_T) | S_t = S]$$

Soulignons bien que cette probabilité risque-neutre est unique, c'est-à-dire, elle est complètement déterminé une fois qu'on a estimé le modèle historique (3.1). Les prix d'options sont donc également complètement déterminés, et il n'est pas possible de calibrer le modèle aux prix d'options cotées sur le marché. Pour cette raison, en pratique, le modèle de volatilité locale n'est pas estimé à partir des données historiques mais utilisé directement dans sa forme risque-neutre (3.3) et calibré aux prix d'options cotées.

### 3.2 Modèle CEV

Un exemple de modèle à volatilité locale bien étudié dans la littérature est donné par le modèle CEV (Constant Elasticity of Variance) de [11]. Dans ce modèle, la volatilité est une fonction puissance du niveau de sous-jacent:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \frac{\sigma_0}{S^{1-\alpha}} dW_t \quad (3.4)$$

Plaçons-nous sous la probabilité risque-neutre, et supposons dans un premier temps que le prix forward du sous-jacent  $F_t = e^{r(T-t)} S_t$  suit le modèle CEV:

$$dF_t = \sigma_0 F_t^\alpha dW_t, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.5)$$

Le modèle de Black-Scholes et le modèle gaussien sont des cas limites de cette équation avec  $\alpha = 1$  et  $\alpha \rightarrow 0$  respectivement. La valeur 0 est une barrière *absorbante*, si  $F_t = 0$  pour un  $t$ ,  $F_s \equiv 0$  pour tout  $s \geq t$ .

**Existence d'une solution** L'existence de solution de l'équation (3.5) peut être établi en reliant le processus  $F$  avec le processus de Bessel. Soit  $(B^1, \dots, B^n)$  un mouvement brownien standard en dimension  $n$  et  $R_t^2 = \sum_{i=1}^n (B_t^i)^2$ . Il est facile de voir que

$$d(R_t^2) = 2R_t dW_t + n dt \quad (3.6)$$

où  $W$  est un nouveau mouvement brownien. En posant  $\rho_t = R_t^2$ , on a donc

$$d\rho_t = 2\sqrt{|\rho_t|} dW_t + n dt \quad (3.7)$$

et, pour  $n > 1$ ,

$$dR_t = dW_t + \frac{n-1}{2} \frac{dt}{R_t}.$$

On peut démontrer que l'équation (3.7) admet une solution forte pour des valeurs de  $n$  non entières, permettant de définir le processus de Bessel [8]:

**Définition 2.** Soit  $\delta \geq 0$  et  $x \geq 0$ . L'unique solution forte de l'équation

$$\rho_t = x + \delta t + 2 \int_0^t \sqrt{\rho_s} dW_s$$

s'appelle le processus BESQ (Bessel squared) de dimension  $\delta$ . Le processus  $R_t = \sqrt{\rho_t}$  s'appelle le processus de Bessel de dimension  $\delta$ .

Soit  $\tau = \inf\{t : F_t = 0\}$  et posons  $X_t = \frac{1}{\sigma_0(1-\alpha)} F_t^{1-\alpha}$ . Par une application de la formule d'Itô, sur l'ensemble sur  $\{t < \tau\}$ ,

$$dX_t = dW_t - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)X_t} dt,$$

ce qui donne le lien entre CEV et le processus de Bessel.

**Propriété de martingale** La contrainte  $0 < \alpha \leq 1$  est imposée puisqu'on peut démontrer que pour  $\alpha > 1$ ,  $(F_t)$  est une martingale locale stricte, c'est-à-dire, pas une vraie martingale, ce qui peut conduire, par exemple, à la violation de la parité Call-Put et d'autres inconvénients. Montrons que pour  $0 < \alpha \leq 1$ , l'équation (3.5) définit une vraie martingale de carré intégrable sur  $[0, T]$  pour tout  $T < \infty$ . Pour cela il est suffisant de voir que

$$E\{[F]_T\} = E\left\{\sigma_0^2 \int_0^T F_t^{2\alpha} dt\right\} < \infty. \quad (3.8)$$

Soit  $\tau_n = \inf\{t : F_t \geq n\}$ .  $F_{T \wedge \tau_n}$  est alors de carré intégrable, et on a, pour  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$$E[F_{\tau_n \wedge T}^2] = \sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt\right] \leq \sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} (1 + F_t^2) dt\right] \leq \sigma_0^2 E\left[\int_0^T (1 + F_{t \wedge \tau_n}^2) dt\right]$$

Par le lemme de Gronwall on a alors

$$\sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt\right] = E[F_{\tau_n \wedge T}^2] \leq \sigma_0^2 T e^{\sigma_0^2 T},$$

d'où (3.8) est déduit par convergence monotone.

**Volatilité implicite** La forme de la volatilité implicite du modèle CEV est connue grâce à l'approximation asymptotique de Hagan et Woodward [31]:

$$\sigma^{imp}(K, T) = \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}} \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{24} \left(\frac{F_0 - K}{F_m}\right)^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{24} \frac{\sigma_0^2 T}{F_m^{2-2\alpha}} + \dots \right\}, \quad F_m = \frac{1}{2}(F_0 + K). \quad (3.9)$$

Au premier ordre, on a donc  $\sigma^{imp}(K, T) \approx \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}}$ : la volatilité implicite a la même forme que la volatilité locale mais avec une pente à la monnaie 2 fois plus petite.

**Cas général** ( $\mu \neq 0$ ) Soit  $F_t^{(\mu)} := e^{\mu t} F_{\tau(t)}$ , avec  $\tau(t)$  un changement de temps déterministe à préciser. Alors

$$dF_t^{(\mu)} = \mu F_t^{(\mu)} dt + e^{\mu t} dF_{\tau(t)}.$$

On a par ailleurs

$$F_{\tau(t)} = \int_0^{\tau(t)} \sigma_0 F_s^\alpha dW_s = \int_0^t \sigma_0 F_{\tau(s)}^\alpha dW_{\tau(s)},$$

d'où

$$dF_{\tau(t)}^0 = \sigma_0 F_{\tau(t)}^\alpha \sqrt{\tau'(t)} dW_t = e^{-\alpha \mu t} \sqrt{\tau'(t)} \sigma_0 (F_t^{(\mu)}) dW_t.$$

Finalement, en choisissant  $\tau$  avec  $\tau'(t) = e^{2\mu(\alpha-1)t}$ , c'est-à-dire,

$$\tau(t) = \frac{1 - e^{2\mu(1-\alpha)t}}{2\mu(1-\alpha)t}$$

on retrouve l'équation (3.4).

### 3.3 Arbre trinomial de pricing

Dans cette section, pour simplifier l'exposé, on pose  $r_t \equiv r$  pour tout  $t$ . Une première méthode pour calculer numériquement les prix des options dans un modèle à volatilité locale consiste à approcher la diffusion en temps continu  $S$  par une chaîne de Markov (un arbre)  $\hat{S}_{t_i}, i = 0, \dots, N, t_i = t_0 + i\Delta t$ , en utilisant un résultat de

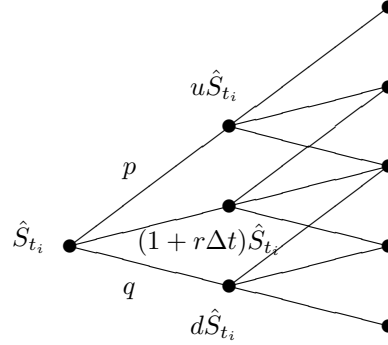


Figure 3.1: Arbre trinomial.

convergence (théorème 10 de l'annexe) des chaînes de Markov vers les diffusions. Dans un arbre binomial défini par

$$\hat{S}_{t_{i+1}} = \begin{cases} u\hat{S}_{t_i}, & q \\ d\hat{S}_{t_i}, & 1 - q \end{cases}$$

la probabilité risque-neutre de transition  $q$  est fixée par la condition de martingale:  $qu + (1 - q)d = 1 + r\Delta t$ . Pour tenir compte du fait que la volatilité est variable, on devrait alors faire varier les paramètres  $u$  et  $d$  en fonction de la position du noeud dans l'arbre [51], mais ceci conduit à des difficultés d'implémentation (difficile par exemple d'obtenir un arbre recombinant). Ce problème ne se pose pas si on utilise un arbre *trinomial*:

$$\hat{S}_{t_{i+1}} = \begin{cases} u\hat{S}_{t_i}, & p \\ (1 + r\Delta t)\hat{S}_{t_i}, & 1 - p - q, \\ d\hat{S}_{t_i}, & q \end{cases}$$

Pour la convergence vers le processus continu (voir théorème 10) on impose:

$$\begin{aligned} E[\hat{S}_{t_{i+1}} | \hat{S}_{t_i}] &= (1 + r\Delta t)\hat{S}_{t_i} \quad (\text{arbre risque-neutre}) \\ \text{Var}[\hat{S}_{t_{i+1}} | \hat{S}_{t_i}] &= \hat{S}_{t_i}^2 \sigma^2(t_i, \hat{S}_{t_i}) \Delta t \end{aligned}$$

Dans un arbre trinomial on peut donc fixer  $u$  et  $d$  (le squelette de l'arbre) librement et choisir les probabilités de transition  $p(t_i, \hat{S}_{t_i})$  et  $q(t_i, \hat{S}_{t_i})$  pour satisfaire les équations ci-dessus. Un calcul rapide laissé au lecteur montre qu'il faut prendre

$$p(t_i, \hat{S}_{t_i}) = \frac{\sigma(t_i, \hat{S}_{t_i})^2 \Delta t}{(u - d)(u - 1 - r\Delta t)} \quad q(t_i, \hat{S}_{t_i}) = \frac{\sigma(t_i, \hat{S}_{t_i})^2 \Delta t}{(u - d)(1 + r\Delta t - d)} \quad (3.10)$$

Pour que l'arbre soit recombinant (un arbre est dit recombinant si le nombre de noeuds dans chaque tranche croît linéairement avec temps, comme sur le dessin 3.1, et non pas exponentiellement), on pose  $ud = (1 + r\Delta t)^2$ .

L'arbre n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si toutes les probabilités de transition sont positives, et pour cela il suffit que  $p + q \leq 1$  dans chaque noeud de l'arbre. Ceci est toujours vrai si le pas de temps  $\Delta t$  est suffisamment petit en comparaison avec le pas d'espace (à comparer avec la condition CFL de stabilité d'un schéma de différences finies explicite). Par exemple,  $p + q \leq 1$  si la condition suivante est respectée (les détails du calcul sont laissés au lecteur):

$$1 + r\Delta t - d > \sigma(t_i, \hat{S}_{t_i}) \sqrt{\Delta t}.$$

Pour que cette inégalité soit toujours vérifiée, on peut poser

$$d = 1 + r\Delta t - \bar{\sigma} \sqrt{\Delta t},$$

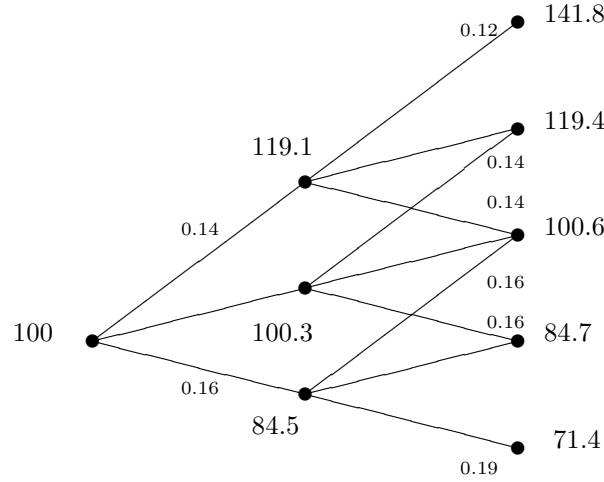


Figure 3.2: Exemple d'un arbre trinomial

où  $\bar{\sigma}$  est une constante qui satisfait  $\bar{\sigma} > \sigma(t, S)$  dans tous les noeuds de l'arbre. Cette constante n'est pas toujours facile à trouver si  $\sigma(t, S)$  n'est pas bornée. Pour contourner cette difficulté, il suffit de choisir  $\bar{\sigma}$  assez grand et remplacer le modèle initial par le modèle

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \min(\bar{\sigma}, \sigma(t, S_t)) dW_t.$$

L'arbre construit à partir de cette diffusion sera toujours sans opportunité d'arbitrage, au prix de travailler dans un modèle légèrement différent.

**Evaluation backward des prix d'options dans un arbre trinomial** Pour calculer le prix d'une option call européen sur un arbre, l'algorithme standard peut être employé:

- A la date finale, les prix sont donnés par:  $C(t_N, S) = (S - K)^+$ .
- A toute date  $t_i$  pour  $i < N$ , les prix dans tous les noeuds de l'arbre sont calculés à partir des prix à la date  $t_{i+1}$  par l'évaluation risque-neutre:

$$C(t_i, S) = \frac{1}{1 + r\Delta t} \{pC(t_{i+1}, uS) + qC(t_{i+1}, dS) + (1 - p - q)C(t_{i+1}, (1 + r\Delta t)S)\}.$$

**Exemple 1** (Modèle CEV). Prenons l'exemple du modèle CEV (3.4). Avec les paramètres  $S_0 = 100$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma_0 = 3$ ,  $r = 0.03$ ,  $N = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  et  $\bar{\sigma} = 0.5$ , on trouve  $d \approx 0.845$ , et  $u \approx 1.191$ , ce qui correspond à l'arbre de la figure 3.2. Les prix d'une option call de strike  $K = 100$  dans les différents noeuds de l'arbre, obtenus par l'évaluation backward, sont montrés sur fig. 3.3. En itérant la procédure pour plusieurs strikes (avec un arbre plus grand et les données légèrement différentes), on trouve un comportement de volatilité implicite tracé sur fig. 3.4, qui montre que les modèles à volatilité locale reproduisent bien le phénomène de skew de volatilité.

### 3.4 Diffusion implicite de Dupire

Rappelons que dans un modèle de volatilité locale le prix d'une option qui paie  $h(S_T)$  à l'instant  $T$  satisfait

$$r_t C(t, S) = \frac{\partial C}{\partial t} + r_t S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, \quad C(T, S) = h(S). \quad (3.11)$$

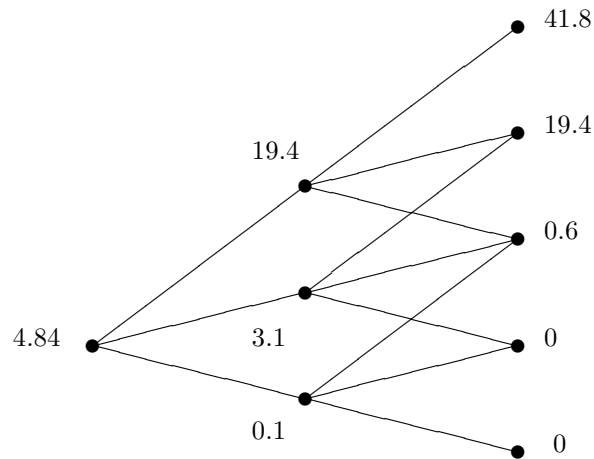


Figure 3.3: Exemple d'évaluation (prix d'une option call dans chaque noeud de l'arbre avec les données de l'exemple 1.)

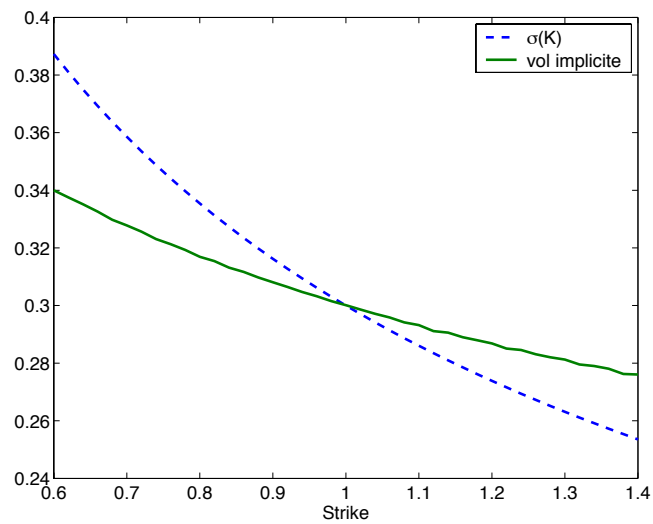


Figure 3.4: Skew (profil décroissant) de volatilité dans le modèle CEV avec  $\sigma = 0.3$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $S_0 = 1$  et  $T = 1$

Ceci est une équation *backward*, car on lui associe une condition terminale et l'équation se résout sur l'intervalle  $[t, T]$  dans la direction  $T \rightarrow t$ . Cette équation est satisfaite par le prix de toute option européenne, pas nécessairement call ou put. Elle permet de calculer le prix d'une option en fonction de la date d'observation  $t$  et de la valeur actuelle du sous-jacent  $S_t$ .

Notre objectif maintenant est de trouver une fonction de volatilité locale  $\sigma(t, S)$  qui reproduit, à une date donnée, les prix observés des calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Equation (3.11) ne permet pas de reconstruire la volatilité locale en écrivant

$$\sigma^2(t, S) = \frac{rC - \frac{\partial C}{\partial t} - rS \frac{\partial C}{\partial S}}{\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}},$$

car à une date donnée, les valeurs de  $t$  et  $S$  sont fixées, et on ne peut pas calculer les dérivées partielles. La solution à ce problème a été donnée par Bruno Dupire [18] qui a proposé une méthode pour calculer  $\sigma(t, S)$  à partir d'une observation des prix d'options (pour tous strikes et maturités) à une date donnée. Il a démontré que dans un modèle à volatilité locale, les prix de calls  $C(t, S_t, T, K)$  vérifient l'équation forward (avec condition initiale):

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad C(t, S_t, T, K) = (S_t - K)^+$$

Cette équation s'applique uniquement aux prix des options Call, qui sont cette fois considérés comme fonctions du strike  $K$  et de la maturité  $T$ . Comme à une date donnée on peut observer les prix d'options de plusieurs strikes et maturités, cette équation peut être utilisée pour recalculer la fonction de volatilité  $\sigma(\cdot, \cdot)$  à partir des prix d'options. Ce résultat implique que dans un modèle de volatilité locale, la fonction de volatilité  $\sigma$  peut être retrouvée de façon unique avec:

$$\sigma(T, K) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \quad (3.12)$$

Comme on l'a déjà observé dans le cas des arbres implicites, le fait qu'on puisse retrouver de façon unique un processus markovien continu à partir des prix d'options européennes n'implique pas qu'il n'y a pas d'autres modèles (non markoviens ou non continus) qui évaluent les options européennes de la même façon. La connaissance des prix des options euro détermine les distributions marginales du processus, mais la loi du processus ne se limite pas à ces distributions marginales.

**Théorème 1.** Soit  $(S_t)_{t_0 \leq t}$  une solution de l'EDS

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad S_{t_0} = S_0.$$

Supposons que

1.  $S_t$  est de carré intégrable:

$$E \left[ \int_{t_0}^T S_t^2 dt \right] < \infty, \quad \forall T$$

2. Pour chaque  $t > t_0$ , la variable aléatoire  $S_t$  a une densité  $p(t, x)$ , continue sur  $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$ .
3. Le coefficient de diffusion  $\sigma(t, x)$  est continu sur  $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$ .

Alors la fonction de prix d'une option call

$$C(T, K) = e^{-r(T-t_0)} E[(S_T - K)^+].$$

satisfait l'équation de Dupire

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad (T, K) \in [t_0, \infty) \times [0, \infty) \quad (3.13)$$

avec condition initiale  $C(t_0, K) = (S_0 - K)^+$ .

*Preuve.* La démonstration repose sur l'application de la formule d'Itô à la semimartingale  $e^{-rt}(S_t - K)^+$ . Puisque la fonction  $f(x) = x^+$  n'est pas  $C^2$ , la formule d'Itô classique ne s'applique pas directement. Une solution possible [19] consiste à utiliser la formule de Meyer-Itô pour les fonctions convexes [47]. Ici, nous adoptons une autre approche qui consiste à régulariser  $f$  en introduisant la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{(x + \varepsilon/2)^2}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + x \mathbf{1}_{x > \varepsilon/2}.$$

Il est clair que  $f_\varepsilon$  est 2 fois différentiable et différente de  $f$  seulement si  $|x| < \varepsilon/2$ . De plus, on a

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{x + \varepsilon/2}{\varepsilon} \mathbf{1}_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + \mathbf{1}_{x > \varepsilon/2}, \quad f''_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2}.$$

L'application de la formule d'Itô standard à  $e^{-rt}f_\varepsilon(S_t - K)$  entre  $T$  et  $T + \theta$  donne

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)}f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K) - e^{-rT}f_\varepsilon(S_T - K) &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt}f_\varepsilon(S_t - K)dt \\ &\quad + \int_T^{T+\theta} e^{-rt}f'_\varepsilon(S_t - K)dS_t + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt}f''_\varepsilon(S_t - K)\sigma^2(t, S_t)S_t^2dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En prenant l'espérance de chaque terme dans (3.14) sous l'hypothèse 1 ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)}E[f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K)] - e^{-rT}E[f_\varepsilon(S_T - K)] &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt}E[f_\varepsilon(S_t - K)]dt \\ &\quad + \int_T^{T+\theta} e^{-rt}E[f'_\varepsilon(S_t - K)S_t]r dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} (K+x)^2 \sigma^2(t, K+x)p(t, K+x)dt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

En utilisant l'hypothèse 2 ci-dessus, on peut passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} C(T + \theta, K) - C(T, K) &= -r \int_T^{T+\theta} C(t, K)dt + r \int_T^{T+\theta} e^{-rt}E[S_t \mathbf{1}_{S_t \geq K}]dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K)K^2 p(t, K)dt \\ &= rK \int_T^{T+\theta} e^{-rt}P[S_t \geq K]dt + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K)K^2 p(t, K)dt. \end{aligned}$$

En divisant les deux parties par  $\theta$  et en passant à la limite  $\theta \rightarrow 0$ , ceci donne

$$\frac{\partial C}{\partial T} = rKe^{-rT}P[S_T \geq K] + \frac{1}{2}e^{-rT} \sigma^2(T, K)K^2 p(T, K).$$

Finalement, en observant que

$$e^{-rT}P[S_T \geq K] = -\frac{\partial C}{\partial K} \quad \text{et} \quad e^{-rT}p(T, K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2},$$

on trouve l'équation de Dupire. □

**Modèle à volatilité locale comme projection markovienne** Soit  $(S_t)_{t_0 \leq t}$  un processus d'Itô général de la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dW_t, \quad S_{t_0} = S_0$$



avec  $\sigma_t$  aléatoire, et supposons que  $\sigma_{loc}^2(t, x) := E[\sigma_t^2 | S_t = x]$  vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus. En suivant la preuve étape par étape, il est facile de se convaincre que les prix des options dans le modèle associé à  $(S_t)$  vérifient l'équation de Dupire avec volatilité  $\sigma_{loc}(t, x)$ . Autrement dit, la fonction de volatilité  $\sigma_{loc}^2(t, x) = E[\sigma_t^2 | S_t = x]$  définit une diffusion markovienne qui a les mêmes prix d'options européennes et donc les mêmes lois marginales que  $(S_t)$ . Cette diffusion s'appelle la *projection markovienne* de  $(S_t)$ .

L'interprétation de la volatilité locale comme projection markovienne d'un processus général de volatilité permet de conclure que pour certains produits, le modèle de volatilité locale donne le prix maximal ou minimal parmi toutes les modèles calibrés aux mêmes prix d'options européennes. Par exemple, pour une option qui porte sur la variance instantanée  $\sigma_t^2$  (de telles options n'existent pas, mais pour une option sur la variance réalisée sur une courte période on s'attend au même effets), on a par l'inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E}[(\sigma_t^2 - K)^+] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\sigma_t^2 - K)^+ | S_t]] \geq \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\sigma_t^2 | S_t] - K)^+] = \mathbb{E}[(\sigma_{loc}^2(t, S_t) - K)^+] = \mathbb{E}^{loc}[(\sigma_{loc}^2(t, S_t) - K)^+],$$

où  $\mathbb{E}^{loc}$  dénote l'espérance dans le modèle avec volatilité locale  $\sigma_{loc}$  et la dernière égalité est due au fait que la variable aléatoire  $S_t$  a la même distribution dans le modèle initial et dans le modèle à volatilité locale. On peut donc conclure que le prix d'une option call sur variance calculé dans le modèle à volatilité locale est proche de la borne inférieure sur l'ensemble des modèles calibrés aux mêmes prix d'options.

**Volatilité forward dans les modèles à volatilité locale** Un autre exemple d'utilisation de la projection markovienne est fourni par la volatilité forward. La volatilité forward est en fait la volatilité implicite d'une option forward start.

Il existent deux définitions deux définition d'une option forward start: pour l'option forward start de type I le pay-off à l'instant  $t + \tau$  est égal à

$$\left( \frac{S_{t+\tau}}{S_t} - K \right)^+$$

et pour l'option forward start de type II le pay-off est

$$(S_{t+\tau} - K S_t)^+$$

Dans le modèle de Black-Scholes avec volatilité  $\sigma$ , les prix de ces options sont donnés par

$$P_{BS}^I(S_0, K, t, \tau) = e^{-rt} C^{BS}(1, K, \tau, \sigma) \quad \text{et} \quad P_{BS}^{II}(S_0, K, t, \tau) = S_0 C^{BS}(1, K, \tau, \sigma).$$

Supposons que la volatilité implicite ne dépend que du moneyness  $K/S$  (propriété sticky delta) et soit  $I_t(\tau, K)$  la volatilité implicite en  $t$  pour l'échéance  $t + \tau$  et moneyness  $K$ . Alors,

$$\begin{aligned} P^I(t, \tau, K) &= \mathbb{E} \left[ e^{-r(t+\tau)} S_t^{-1} (S_{t+\tau} - K S_t)^+ \right] = \mathbb{E} \left[ e^{-rt} C^{BS}(1, K, \tau, I_t(K, \tau)) \right] \\ P^{II}(t, \tau, K) &= \mathbb{E} \left[ e^{-r(t+\tau)} (S_{t+\tau} - K S_t)^+ \right] = \mathbb{E} \left[ e^{-rt} S_t C^{BS}(1, K, \tau, I_t(K, \tau)) \right] \end{aligned}$$

En comparant ces formules avec celle de Black-Scholes, on voit que la volatilité implicite forward de type I et II est définie comme solution des équations

$$\begin{aligned} C^{BS}(1, K, \tau, I_F^I(t, \tau, K)) &= \mathbb{E} [C^{BS}(1, K, \tau, I_t(K, \tau))], \\ C^{BS}(1, K, \tau, I_F^{II}(t, \tau, K)) &= \widehat{\mathbb{E}} [C^{BS}(1, K, \tau, I_t(K, \tau))], \end{aligned}$$

où  $\widehat{\mathbb{E}}$  est l'espérance sous la "share measure", définie par  $\left. \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{-rt} S_t}{S_0}$ .

A la monnaie ( $K = 1$ ), le prix Black-Scholes est concave en volatilité, et on trouve

$$I_F^I(t, \tau, 1) \leq \mathbb{E}[I_t(K, \tau)], \quad I_F^{II}(t, \tau, 1) \leq \widehat{\mathbb{E}}[I_t(K, \tau)].$$

Si de plus  $\tau$  est petit,  $C^{BS}(1, K, \tau, \sigma) \approx S_0 \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}$ , et on obtient

$$I_F^I(t, \tau, 1) \approx \mathbb{E}[I_t(K, \tau)], \quad I_F^{II}(t, \tau, 1) \approx \widehat{\mathbb{E}}[I_t(K, \tau)].$$

En considerant que la volatilité du sous-jacent ne change pas beaucoup entre  $t$  et  $t + \tau$ , on a également

$$I_F^I(t, \tau, 1) \approx \mathbb{E}[\sigma_t], \quad I_F^{II}(t, \tau, 1) \approx \widehat{\mathbb{E}}[\sigma_t].$$

Finalement, par l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sigma_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sqrt{\sigma_t^2} | S_t]] \leq \mathbb{E}[\sqrt{\mathbb{E}[\sigma_t^2 | S_t]}] = \mathbb{E}[\sigma(t, S_t)] \\ \widehat{\mathbb{E}}[\sigma_t] &= \mathbb{E}\left[\frac{S_t}{S_0} \mathbb{E}[\sqrt{\sigma_t^2} | S_t]\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{S_t}{S_0} \sigma(t, S_t)\right] = \widehat{\mathbb{E}}[\sigma(t, S_t)]. \end{aligned}$$

On peut donc dire de manière approximative que parmi tous les modèles calibrés aux mêmes options européennes, la volatilité forward à la monnaie est la plus élevée dans le modèle à volatilité locale.

**Vision EDP de la formule de Dupire** La formule de Dupire peut être vue comme une conséquence de l'équation Fokker-Planck pour la densité du processus. Soit  $\mu_t(S)$  la densité de  $S_t$ . Alors, sous des hypothèses de régularité qu'on ne détaille pas ici,

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2 \mu_t) + \frac{\partial}{\partial S} (rS \mu_t) = 0, \quad \mu_0(S) = \delta_{S_0}(S) \quad (3.16)$$

Cette équation s'appelle l'équation de Fokker-Planck ou l'équation forward de Kolmogorov pour le processus  $(S_t)$ . Remarquons tout de même que les hypothèses nécessaires pour ce résultat sont bien plus fortes que celles du théorème 1: par exemple, ici on a besoin que la densité soit  $C^2$ .

Les prix des calls s'obtiennent en intégrant la densité risque-neutre deux fois:

$$Call(0, S_0, T, K) = e^{-rT} \int_K^\infty dS \int_S^\infty dS' \mu_T(S')$$

Pour retrouver l'équation de Dupire, on intègre donc l'équation de Fokker-Planck (3.16) deux fois terme par terme et multiplie par  $e^{-rT}$ :

- Premier terme:

$$e^{-rT} \int_K^\infty dS \int_S^\infty dS' \frac{\partial \mu_T(S')}{\partial T} = e^{-rT} \frac{\partial}{\partial T} (e^{rT} C(T, K)) = rC(T, K) + \frac{\partial C}{\partial T}.$$

- Deuxième terme:

$$\begin{aligned} -e^{-rT} \int_K^\infty dS \int_S^\infty dS' \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2 S'^2 \mu_t(S')) &= -\frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \mu_T(K) e^{-rT} \\ &= -\frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}. \end{aligned}$$

- Troisième terme:

$$\begin{aligned} e^{-rT} \int_K^\infty dS \int_S^\infty dS' \frac{\partial}{\partial S'} (rS' \mu_T(S')) &= -e^{-rT} \int_K^\infty rS \mu_T(S) dS \\ &= - \int_K^\infty rS \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} dS = r \int_K^\infty \frac{\partial C}{\partial K} dS + rK \frac{\partial C}{\partial K} = rK \frac{\partial C}{\partial K} - rC(T, K). \end{aligned}$$

En rassemblant les trois termes, on trouve (3.13).

Théorème 1 permet de retrouver le coefficient de volatilité à partir d'un ensemble complet de prix de calls à une date donnée, *si on sait que ces prix proviennent d'un modèle de volatilité locale*. Il ne permet pas directement de répondre à la question suivante: étant donné un système de prix de calls  $(C(T, K))_{T \geq 0, K \geq 0}$ , est-ce qu'il existe un modèle de diffusion continu permettant de reproduire ces prix? Pour appliquer la formule de Dupire (3.12) on a besoin au moins de supposer  $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} > 0$  et  $\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} \geq 0$ . Ces contraintes correspondent aux contraintes d'arbitrage de positivité d'un *butterfly spread* et d'un *calendar spread* respectivement (voir section 1.4). Cependant, il se peut que même si la volatilité  $\sigma(t, S)$  existe, elle ne conduit pas à un processus de Markov qui satisfait les trois hypothèses du théorème 1. Le résultat suivant donne une condition suffisante sous laquelle un processus de diffusion a une densité.

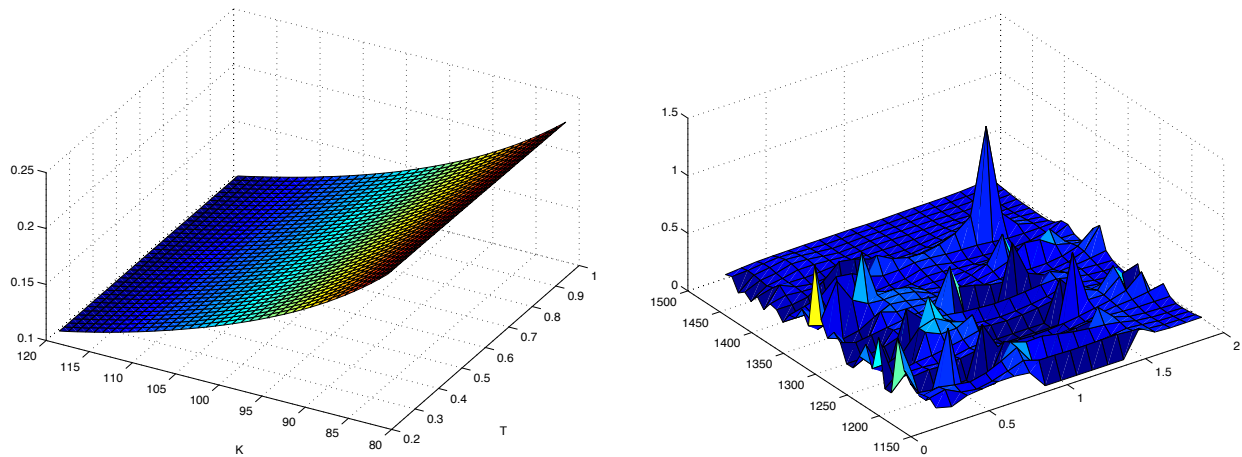


Figure 3.5: Exemple de diffusion implicite. Gauche: données artificielles: la volatilité implicite est de la forme  $I(K) = 0.15 \times \frac{100}{K}$  pour toutes maturités ( $S_0 = 100$ ). Droite: données d'options sur S&P 500, interpolation par splines.

**Proposition 2** (théorème 2.3.1 dans [45]). Soit  $(X_t, t \in [0, T])$  la solution d'une EDS

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

où les coefficients sont globalement Lipschitz et de croissance sous-linéaire, et soit

$$S = \inf\{t > 0 : \int_0^t 1_{\sigma(s, X_s) > 0} ds > 0\} \wedge T.$$

Alors, pour tout  $0 < t \leq T$ , la loi de  $X_t$  conditionnellement à  $\{t > S\}$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

Par exemple, si  $\sigma(0, X_0) > 0$ , le processus a une densité.

**Exemple 2.** Figure 3.5 montre les résultats d'application de la formule de Dupire aux données artificielles (gauche) et aux prix réels d'options sur l'indice S&P 500. Alors que sur les données simulées, la formule de Dupire permet de retrouver un surface de volatilité locale qui paraît cohérent, la performance pour les données réelles n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons:

- Les prix de marché ne sont pas connus pour tous les strikes et toutes les maturités. Ils doivent donc être interpolés et le résultat final sera très sensible à la méthode d'interpolation utilisée.
- Du fait de la nécessité de calculer la deuxième dérivée de la fonction de prix d'option  $C(T, K)$ , les petites erreurs de données conduisent à des très grands erreurs sur la solution (problème mal posé). On reviendra sur ce point dans la section 3.6.

### Résumé des principaux points critiques du modèle de volatilité locale et de l'approche de Dupire

- La surface de volatilité locale obtenue par la formule de Dupire est très sensible à la méthode d'interpolation des données
- Le seul facteur de risque est le sous-jacent; impossible de prendre en compte le risque de volatilité
- La surface de volatilité locale calibrée n'est pas stable au cours de temps
- La dynamique de volatilité préconisée par le modèle ne correspond pas à celle observée sur le marché
- Calibration ne peut pas être effectué de façon cohérente avec l'estimation historique (marché complet)

### 3.5 Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale

**Lien entre volatilité locale et volatilité implicite** La formule de Dupire (3.12) peut être réécrite en terme de volatilités implicites du marché, en observant que pour toute option on a

$$C(T, K) = C^{BS}(T, K, I(T, K)),$$

où  $C^{BS}(T, K, \sigma)$  dénote la formule Black-Scholes pour le prix d'une call de volatilité  $\sigma$  et  $I(T, K)$  est la volatilité implicite observée pour maturité  $T$  et strike  $K$ . Il sera plus pratique d'exprimer les prix en terme de *log-strike*  $k = \log(K/S) - rT$ , avec  $I(T, K) = \tilde{I}(T, k)$  et  $\sigma(T, K) = \tilde{\sigma}(T, k)$  et volatilité implicite sans dimension  $v(T, k) = \tilde{I}(T, k)\sqrt{T}$ . On a alors

$$\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial T} = Sn(d_1) \frac{\partial v}{\partial T} \quad (3.17)$$

et

$$K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial k^2} - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial k} = Sn(d_1) \left\{ v''_{kk} - \frac{v}{4} (v'_k)^2 + \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{kv'_k}{v} \right)^2 \right\}, \quad (3.18)$$

ce qui donne finalement

$$\tilde{\sigma}^2(T, k) = \frac{2vv'_T}{vv''_{kk} - \frac{v^2}{4}(v'_k)^2 + \left(1 - \frac{kv'_k}{v}\right)^2} = \frac{2\tilde{I}T\tilde{I}'_T + \tilde{I}^2}{\tilde{I}T\tilde{I}''_{kk} - \frac{\tilde{I}^2T^2}{4}(\tilde{I}'_k)^2 + \left(1 - \frac{k\tilde{I}'_k}{\tilde{I}}\right)^2}. \quad (3.19)$$

Dans un premier temps supposons que la volatilité implicite ne dépend pas de strike (absence de smile). Dans ce cas la volatilité locale ne dépend pas non plus de strike et la formule (3.19) se réduit à

$$\sigma^2(T) = I^2(T) + 2I(T)T \frac{\partial I}{\partial T},$$

d'où

$$I^2(T) = \frac{\int_0^T \sigma^2(s) ds}{T},$$

la volatilité implicite est donc égale à la moyenne quadratique de la volatilité locale sur la durée de vie de l'option. Ce résultat peut être partiellement généralisé au cas où la volatilité dépend de strike [26].

En supposant que  $I$  et ses dérivées restent finis lorsque  $T \rightarrow 0$ , dans cette limite, l'équation (3.19) devient

$$\tilde{I}^2(0, k) = \tilde{\sigma}^2(0, k) \left( 1 - \frac{k}{\tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial k} \right)^2.$$

Cette équation différentielle se résout explicitement:

$$\tilde{I}(0, k) = \left\{ \int_0^1 \frac{dy}{\tilde{\sigma}(0, ky)} \right\}^{-1}. \quad (3.20)$$

Nous avons donc démontré que, *dans la limite de très courte maturité, la volatilité implicite est égale à la moyenne harmonique des volatilités locales*, un résultat établi par Berestycki et Busca [3]. Lorsque la volatilité locale  $\sigma(0, x)$  est différentiable en  $x = 0$ , équation (3.20) permet de démontrer que (le calcul est laissé au lecteur)

$$\frac{\partial \tilde{I}(0, 0)}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}(0, 0)}{\partial k},$$

la pente à la monnaie de la volatilité locale est égale, pour les courtes maturités, à 2 fois la pente à la monnaie de la volatilité implicite.

Dans le cas du modèle CEV ( $r = 0$ ),  $\tilde{\sigma}(t, k) = \sigma_0 S^{\alpha-1} e^{(\alpha-1)k}$  et on trouve

$$I(0, K) = \frac{\sigma_0(1-\alpha) \log(S/K)}{S^{1-\alpha} - K^{1-\alpha}}.$$

La formule de Hagan et Woodward (3.9) n'est donc pas exacte pour tout  $K$  lorsque  $T \rightarrow 0$ , mais on peut vérifier que les deux formules s'accordent près de la monnaie jusqu'à l'ordre 2 en  $K - S$ .

**Calcul du smile asymptotique: une approche alternative** La formule (3.20) relie la volatilité implicite à la volatilité locale dans la limite de faible maturité  $T \rightarrow \infty$ . Le calcul de la volatilité implicite se fait généralement en deux étapes: calcul du prix de l'option, et l'inversion de la formule de Black-Scholes. Dans la limite  $T \rightarrow 0$ , la formule de Black-Scholes devient singulière, ce qui permet de simplifier son inversion. Puisque, pour  $x \rightarrow -\infty$ ,

$$N(x) \sim \frac{n(x)}{|x|},$$

on a, toujours avec la notation  $k = \log(K/S) - rT$ ,

$$C^{BS}(S, K, T) \sim \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} Sn(d_1) = \frac{\sigma^3 T^{\frac{3}{2}}}{k^2} Sn(d_1),$$

d'où

$$\lim_{T \downarrow 0} T \log C^{BS}(S, K, T) = -\frac{k^2}{2\sigma^2} \iff \sigma^2 = -\frac{1}{2} \lim_{T \downarrow 0} \frac{k^2}{T \log C^{BS}(S, K, T)}.$$

Par conséquent, la volatilité implicite asymptotique peut être calculée avec la formule simplifiée

$$I^2(0, K) = -\frac{1}{2} \lim_{T \downarrow 0} \frac{k^2}{T \log C(S, K, T)}.$$

L'asymptotique pour le prix de l'option peut être identifiée directement à partir de l'équation de Dupire

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}.$$

Avec la substitution  $V(T, K) = -T \log C(T, K)$ , cette equation devient

$$-T \frac{\partial V}{\partial T} + V = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \left( \frac{\partial V}{\partial K} \right)^2 - \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 T \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} - rKT \frac{\partial V}{\partial K}.$$

Quand  $T \rightarrow 0$ , on peut montrer que la solution de cette équation converge vers la solution de l'ODE

$$V(0, K) = \frac{1}{2} \sigma^2(0, K) K^2 \left( \frac{\partial V(0, K)}{\partial K} \right)^2, \quad (3.21)$$

avec la condition  $V(0, K) = 0$  pour  $K \leq S$ . L'asymptotique sera en effet la même si on pose  $V(T, K) = -T \log \mathbb{P}[S_T \geq K]$ . La solution de l'équation (3.21) est donnée par

$$V(0, K) = \frac{1}{2} \left( \int_S^K \frac{dK'}{K' \sigma(0, K')} \right)^2,$$

ce qui permet de retrouver (3.20). Voir [27] pour des asymptotiques plus précises de la volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale.

### 3.6 Calibration de la volatilité locale

L'équation de Dupire (3.13) définit l'opérateur de pricing  $\sigma(*, *) \mapsto C(*, *)$ , qui à une fonction de volatilité locale donnée associe l'ensemble des prix de calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Inversement, si on observe tous les prix d'options pour tous les strikes et maturités, on peut reconstruire, grâce à la formule de Dupire (3.12). En pratique, on ne dispose que d'un nombre fini de strikes et maturités, et l'opération inverse qui consiste à reconstruire  $\sigma(t, S)$  pour tout  $t, S$  à partir d'un nombre fini de prix  $C_M(T_i, K_i), i = 1 \dots N$ , devient un problème mal posé (cf. exemple 2). Pour résoudre cette difficulté, deux approches sont en général utilisées: interpolation de la volatilité implicite par une forme paramétrique ou semiparamétrique, ou l'approche de régularisation. Les méthodes d'interpolation complètement nonparamétriques (comme les splines) ont en général une performance assez médiocre pour ce type de problèmes. L'interpolation de la volatilité implicite est une méthode très intuitive et rapide, mais les méthodes de régularisation donnent à l'utilisateur un meilleur contrôle de la précision et de la régularité de la surface de volatilité locale.

### 3.6.1 Interpolation de la volatilité implicite

La paramétrisation suivante pour la volatilité implicite en fonction du paramètre de log-strike  $k = \log \frac{K}{S} - rT$  a été proposée par Jim Gatheral [25] (voir également [53]), sous le nom de SVI (stochastic volatility inspired): pour une échéance donnée, la variance implicite totale sans dimension  $V(T, k) = I^2(T, k)T$  vérifie

$$V(k) = a + b\{\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}\}$$

avec  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\rho \in [-1, 1]$  et  $m \in \mathbb{R}$ . Ici,

- $a$  contrôle le niveau global du smile;
- $b$  contrôle la pente des ailes;
- $\rho$  contrôle l'asymétrie, "rotation" du smile;
- $m$  correspond à une translation;
- $\sigma$  contrôle la convexité à la monnaie.

La forme paramétrique SVI doit être calibrée séparément pour chaque échéance disponible. Ensuite, on peut définir la volatilité implicite aux dates intermédiaires par interpolation. Une fois l'interpolation trouvée pour chaque  $k$  et  $T$ , la volatilité locale peut être calculée par la formule de Dupire, qui s'écrit en termes de  $V$ :

$$\sigma(T, k) = \frac{\frac{\partial V(T, k)}{\partial T}}{\left(1 - \frac{k}{2V} \frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} - \frac{1}{4V} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2}. \quad (3.22)$$

**Conditions d'absence d'arbitrage** La paramétrisation SVI peut a priori conduire à des opportunités d'arbitrage statiques, telles que les prix d'options non convexes en fonction du strike. Pour assurer l'absence d'opportunités d'arbitrage, il faut que le numérateur et le dénominateur dans (3.22) soient positifs pour tout  $T$  et  $k$ , et de plus la condition additionnelle  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_1(k) = -\infty$ , qui assure la convergence des calls vers 0 pour grandes valeurs de strike, soit respectée [28].

La positivité du numérateur dans (3.22):  $\frac{\partial V(T, k)}{\partial T} \geq 0$  pour tout  $k$  et  $T$ , correspond à l'absence d'arbitrage intertemporel de type "calendar spread". Autrement dit, l'arbitrage de type "calendar spread" est absent si et seulement si les courbes de variance implicite en fonction du strike pour différentes maturités ne se croisent pas. La positivité du dénominateur

$$d(T, k) = \left(1 - \frac{k}{2V} \frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} - \left(\frac{1}{4V} + \frac{1}{16}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 \geq 0, \quad \forall k.$$

correspond à l'absence d'arbitrages de type "butterfly" (convexité des prix d'options).

**Paramétrisation arbitrage-free de Gatheral et Jacquier** Gatheral et Jacquier [28] proposent la paramétrisation suivante pour toute la nappe de volatilité implicite:

$$V(t, k) = \frac{\theta_t}{2} \left\{ 1 + \rho \phi(\theta_t) k + \sqrt{(\phi(\theta_t) k + \rho)^2 + 1 - \rho^2} \right\}. \quad (3.23)$$

Ici,  $\theta_t = V(t, 0)$  est la variance implicite totale à la monnaie, déduite directement de la nappe du marché. Le paramètre  $\rho$  contrôle l'asymétrie du smile; pour  $\rho = 0$ , le smile est symétrique à toute date. Le skew et la convexité ATM sont donnés par

$$\frac{\partial I(t, k)}{\partial k} \Big|_{k=0} = \frac{\rho \sqrt{\theta_t}}{2\sqrt{t}} \phi(\theta_t), \quad \frac{\partial^2 I(t, k)}{\partial k^2} \Big|_{k=0} = \frac{(1 - 2\rho^2) \sqrt{\theta_t}}{4\sqrt{T}} \phi^2(\theta_t).$$

On peut montrer que la forme paramétrique (3.23) n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si les conditions suffisantes suivantes sont respectées:

- La fonction  $\theta_t$  est croissante en  $t$ ;
- La fonction  $\phi$  vérifie les relations suivantes, pour tout  $\theta > 0$ :

$$0 \leq \frac{\partial(\theta\phi(\theta))}{\partial\theta} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2} \phi(\theta),$$

$$\theta\phi(\theta) < \frac{4}{1 + |\rho|}, \quad \theta\phi^2(\theta) \leq \frac{4}{1 + |\rho|}.$$

Par exemple, la fonction

$$\phi(\theta) = \frac{\eta}{\theta^\gamma(1 + \theta)^{1-\gamma}}$$

vérifie les contraintes d'arbitrage pour  $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$  et  $\eta \leq \frac{2}{\sqrt{1+|\rho|}}$ .

### 3.6.2 Approche par régularisation

Lagnado et Osher [42], Crepey [13] et d'autres auteurs ont utilisé la méthode de Tikhonov pour régulariser le problème de calibration de la surface de volatilité locale. Plus précisément, ces auteurs proposent de minimiser la fonctionnelle

$$J(\sigma) \equiv \sum_{i=1}^N w_i (C(T_i, K_i, \sigma) - C_M(T_i, K_i))^2 + \alpha \|\nabla\sigma\|_2^2, \quad (3.24)$$

$$\|\nabla\sigma\|_2^2 \equiv \int_{K_{\min}}^{K_{\max}} dK \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} dT \left\{ \left( \frac{\partial\sigma}{\partial K} \right)^2 + \left( \frac{\partial\sigma}{\partial T} \right)^2 \right\}. \quad (3.25)$$

Pour minimiser (3.24), on peut utiliser, par exemple, un algorithme de descente de gradient (ou la méthode de gradient conjugué — voir chapitre A):

- Discrétiser  $\sigma$  sur une grille espace-temps;
- Choisir une surface initiale  $\sigma^{(0)}$ , par exemple, constante;
- Evaluer le gradient de  $J(\sigma)$  au point  $\sigma^{(0)}$  et calculer la direction de descente  $\lambda^{(0)}$ ;
- Résoudre le problème de minimisation unidimensionnelle

$$h^* = \arg \inf_h J(\sigma^{(0)} + h\lambda^{(0)});$$

- Poser  $\sigma^{(1)} := \sigma^{(0)} + h^*\lambda^{(0)}$  et passer à l'itération suivante.

Pour mettre en place cet algorithme, une étape essentielle est de calculer le gradient de  $J$ . Le gradient  $\text{grad } J(\sigma)(t, S)$  est défini par:

$$\langle \text{grad } J(\sigma), \delta\sigma \rangle = \delta J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\sigma + \varepsilon\delta\sigma) - J(\sigma)}{\varepsilon}$$

pour toute fonction test  $\delta\sigma$ .

Pour le deuxième terme dans (3.24), l'intégration par parties donne

$$\delta \|\nabla\sigma\|_2^2 = -2 \int_{K_{\min}}^{K_{\max}} dK \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} dT \left\{ \frac{\partial^2\sigma}{\partial K^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial T^2} \right\} \delta\sigma,$$

d'où

$$\text{grad } \|\nabla\sigma\|_2^2 = -2 \left( \frac{\partial^2\sigma}{\partial K^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial T^2} \right).$$

Le premier terme (noté par  $J_1$ ) est plus difficile. On a

$$\begin{aligned} \delta J_1(\sigma) &= 2 \sum_{i=1}^N w_i (C(T_i, K_i, \sigma) - C_M(T_i, K_i)) \delta C(T_i, K_i, \sigma) \\ &= \left\langle 2 \sum_{i=1}^N w_i (C(T_i, K_i, \sigma) - C_M(T_i, K_i)) \delta_{(T_i, K_i)}(T, K), \delta C(T, K, \sigma) \right\rangle, \end{aligned}$$

où le produit scalaire est ici défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\bar{T}} \int_0^\infty f g dK dT$$

avec  $\bar{T}$  l'horizon du temps maximal. La fonction  $C(T, K, \sigma)$  satisfait l'EDP de Dupire

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad C(t, K) = (S_t - K)^+,$$

d'où

$$\frac{\partial \delta C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 \delta C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial \delta C}{\partial K} + \sigma \delta \sigma K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathcal{L} \delta C = \sigma \delta \sigma K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}, \quad \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2}{\partial K^2} + rK \frac{\partial}{\partial K}.$$

Soit  $G$  une fonction qui satisfait

$$\mathcal{L}^* G = 2 \sum_{i=1}^N w_i (C(T_i, K_i, \sigma) - C_M(T_i, K_i)) \delta_{(T_i, K_i)}(T, K), \quad G(\bar{T}, K) = 0, \quad (3.26)$$

où  $\mathcal{L}^*$  est l'opérateur adjoint

$$\mathcal{L}^* f = -\frac{\partial f}{\partial T} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (\sigma^2(T, K) K^2 f) - \frac{\partial}{\partial K} (rK f).$$

Alors

$$\langle \mathcal{L}^* G, \delta C(*, *, \sigma) \rangle = \langle G, \mathcal{L} \delta C(*, *, \sigma) \rangle = \langle G \sigma K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}, \delta \sigma \rangle,$$

ce qui implique

$$\text{grad } J_1(\sigma) = \sigma K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} G.$$

**Résolution du problème adjoint** Soit

$$F(T, K) = \int_0^K dK' \int_0^{K'} dx G(T, x).$$

Alors l'équation (3.26) devient

$$-\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} - rK \frac{\partial F}{\partial K} + rF = 2 \sum_{i=1}^N w_i (C(T_i, K_i, \sigma) - C_M(T_i, K_i)) (K - K_i)^+ \delta_{T_i}(T) \quad (3.27)$$

et

$$\text{grad } J_1(\sigma) = \sigma K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}.$$

L'équation (3.27) est l'équation Black-Scholes standard entre les dates de maturité des options, et aux maturités, on a

$$F(T_i+, K) - F(T_i-, K) = 2 \sum_{j: T_j = T_i} w_j (C(T_j, K_j, \sigma) - C_M(T_j, K_j)) (K - K_j)^+.$$

Cette équation se résout par morceaux entre les dates de maturité.



**Implémentation numérique** Principe: calculer le gradient exact du problème discrétisé plutôt que le gradient approché du problème continu. Pour l'implémentation numérique, la volatilité locale  $\sigma$  doit être discrétisée suivant l'une des méthodes proposées dans la littérature:

- Différences finies: Lagnado et Osher [42].
- Arbre trinomial: Crepey [13].

Le problème est ensuite résolu par la méthode de descente de gradient dans l'espace de surfaces de volatilité discrétisées.

### Points faibles de la méthode

- La fonctionnelle à minimiser  $J(\sigma)$  n'est pas, en général, convexe.
- La dimension du problème de minimisation est très grande (le nombre de noeuds dans l'arbre:  $10^3 \div 10^4$ ).
- La régularisation est la même ( $\|\nabla\sigma\|$ ) dans les régions où la volatilité a beaucoup d'influence sur les prix et dans les régions où cette influence est très petite (là où le processus de prix a peu de chances d'arriver).

**Représentation de volatilité par splines** Pour réduire la dimension du problème d'optimisation, plusieurs auteurs ont proposé de représenter la volatilité par splines: [37, 9].

Splines cubiques: méthode d'interpolation d'une fonction  $f(x)$  dont les valeurs  $f_i$  sont connues en un nombre fini de points  $x_0, \dots, x_n$ .

$$f(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad \text{pour } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$f \in C^2([x_0, x_n])$$

Les coefficients du spline sont calculés à partir des équations suivantes:

$$\begin{aligned} a_i x_{i-1}^3 + b_i x_{i-1}^2 + c_i x_{i-1} + d_i &= f_{i-1}, & i &= 1 \dots n \\ a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i &= f_i, & i &= 1 \dots n \\ 3a_i x_i^2 + 2b_i x_i + c_i &= 3a_{i+1} x_i^2 + 2b_{i+1} x_i + c_{i+1}, & i &= 1 \dots n - 1 \\ \text{(continuité de } f') & & & \\ 6a_i x_i + 2b_i &= 6a_{i+1} x_i + 2b_{i+1}, & i &= 1 \dots n - 1 \\ \text{(continuité de } f'') & & & \end{aligned}$$

Il restent alors deux degrés de liberté pour complètement fixer les coefficients. Pour le *spline cubique naturel*, on prend  $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$ . Ce spline est la fonction qui minimise  $\int_{x_0}^{x_n} (f'')^2 dx$  parmi toutes les fonctions qui passent par les points  $(x_i, f_i)_{i=0}^n$ .

Dans l'approche de Jackson, Suli et Howison [37],  $\sigma(t, S)$  est supposée 2 fois continûment différentiable en  $S$  et continue en  $t$ :

- Pour chaque  $t$  fixé,  $\sigma(t, S)$  est une spline cubique avec noeuds  $S_0 \dots S_P$ .
- Pour chaque  $p = 0, \dots, P$ ,  $\sigma(t, S_p)$  est linéaire par morceaux avec noeuds  $t_0, \dots, t_Q$ .
- La volatilité est complètement déterminé par la matrice de coefficients  $(\Sigma_{pq})_{p=0 \dots P}^{q=0 \dots Q}$ , où  $\Sigma_{pq} = \sigma(t_q, S_p)$ .

Pour résoudre le problème de calibration, on minimise la fonctionnelle

$$J(\Sigma) = \sum_{i=1}^N w_i (C(T_i, K_i, \Sigma) - C_M(T_i, K_i))^2 + c_1 \sum_{p,q} \frac{\sigma_S^2(S_p, t_q)}{(P+1)(Q+1)} + c_2 \sum_{p,q;q \neq Q} \frac{\sigma_t^2(S_p, t_{q+})}{(P+1)Q}$$

Une discrétisation par différences finies ou éléments finis est toujours nécessaire pour calculer les prix d'options mais la dimension du problème de minimisation est réduite.



# Chapitre 4

## Les modèles à volatilité stochastique

En observant les trajectoires de volatilité (fig. 4.1), on comprend immédiatement que ce processus n'est pas à 100% corrélé avec le sous-jacent et que donc cela a un sens de modéliser la volatilité comme un processus stochastique à part entière, sans se limiter à des fonctions déterministes de sous-jacent. Cette classe de modèles est connue sous le nom de modèles à volatilité stochastique. Ils ont comme avantage de non seulement expliquer le phénomène de smile (ce qu'on peut faire déjà dans les modèles à volatilité locale) mais aussi conduire à une dynamique réaliste pour le prix et la surface de volatilité implicite.

Une approche possible est de modéliser la volatilité  $\sigma_t$  par une diffusion continue (solution d'une EDS), mais on peut aussi envisager des processus de Markov discontinus, par exemple, un processus qui ne prend que deux valeurs  $\sigma_1$  (volatilité basse) et  $\sigma_2$  (volatilité haute). Le modèle de processus de diffusion, auquel on se limite ici, a un avantage de faciliter l'introduction d'une corrélation instantanée  $-1 \leq \rho \leq 1$  entre le sous-jacent et la volatilité:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (4.1)$$

$$d\sigma_t = a_t dt + b_t dW'_t, \quad d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt \quad (4.2)$$

Les coefficients  $a_t$  et  $b_t$  sont choisis pour que la volatilité  $\sigma_t$  soit un processus stochastique positif. Souvent, on impose également la condition de stationnarité (retour à la moyenne). Figure 4.2 montre une trajectoire possible du sous-jacent et du processus de volatilité.

Le modèle (4.2) correspond en général à un marché incomplet: le risque de volatilité (risque de vega) ne peut pas être éliminé par une stratégie de trading en actions seulement. Cependant, on n'a ici que deux facteurs de risque ( $W$  et  $W'$ ), ce qui fait que le risque de vega est complètement éliminé par une stratégie de couverture utilisant des actions et un autre actif risqué liquide (par exemple, une option).

### 4.1 Equations de pricing et de couverture

Dans cette section on se place dans un cadre markovien:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (4.3)$$

$$d\sigma_t = a_t dt + b_t dW'_t, \quad d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt \quad (4.4)$$

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt,$$

où  $a_t = a(t, \sigma_t, S_t)$ ,  $b_t = b(t, \sigma_t, S_t)$ . En présence de deux sources de risque on aura besoin de deux actifs risqués pour la couverture. On supposera donc qu'il existe un actif liquide coté au prix

$$C_t^0 = C^0(t, \sigma_t, S_t).$$

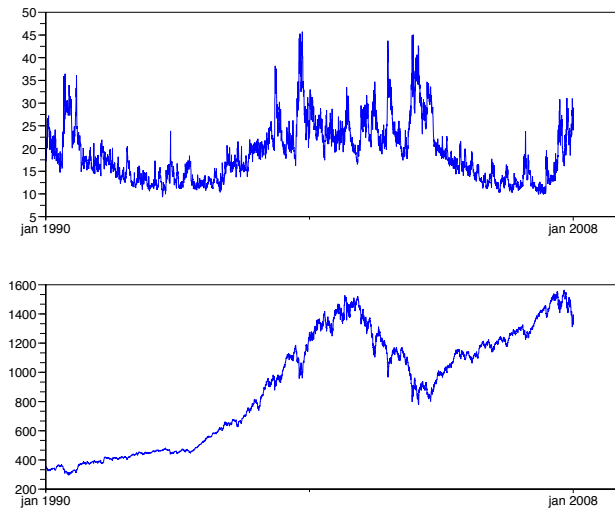


Figure 4.1: Haut: l'indice VIX (volatilité des options sur S&P 500). Bas: cours de l'indice S&P 500

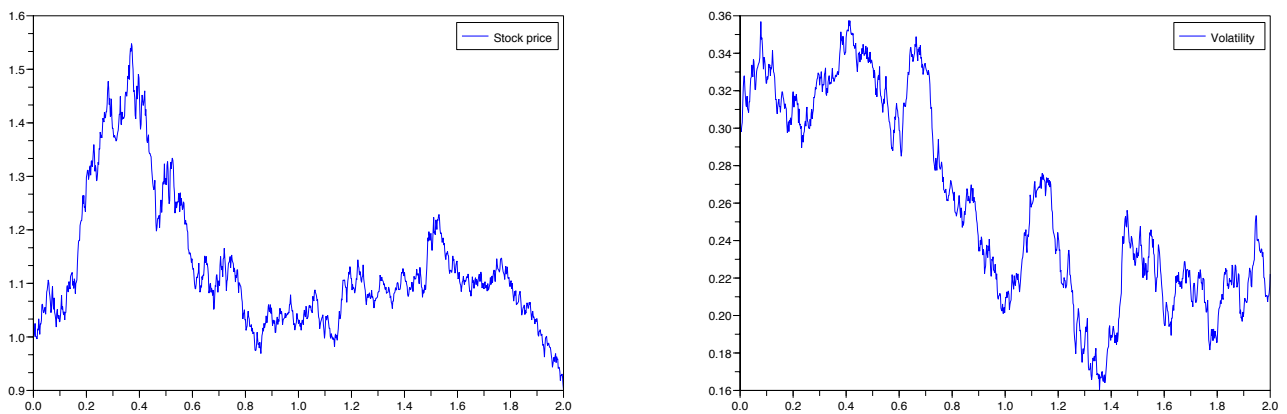


Figure 4.2: Prix de l'action (gauche) et trajectoires de volatilité dans un modèle à volatilité stochastique.

où la fonction déterministe  $C^0(t, \sigma, S)$  est connue et satisfait  $\frac{\partial C^0(t, \sigma, S)}{\partial \sigma} > 0$  pour tout  $t, \sigma, S$  (dans ce cas on dit que l'actif  $C^0$  complète le marché). De plus on aura besoin de l'hypothèse  $-1 < \rho < 1$  et de toutes les hypothèses techniques sur l'existence et régularité des solutions des EDS (4.3)–(4.4) que l'on ne donne pas ici, mais qui sont détaillées dans [48].

Soit  $V_t$  la valeur du portefeuille autofinçant contenant  $\delta_t$  actions et  $\omega_t$  unités de  $C^0$ . Par la condition d'autofinancement et la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} dV_t &= (V_t - \delta_t S_t - \omega_t C_t^0) r dt + \delta_t dS_t + \omega_t dC_t^0 \\ &= (V_t - \delta_t S_t - \omega_t C_t^0) r dt \\ &\quad + (\delta_t + \omega_t \frac{\partial C^0}{\partial S}) dS_t + \omega_t \frac{\partial C^0}{\partial \sigma} d\sigma_t + \omega_t \mathcal{L}_t C^0 dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec  $\mathcal{L}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + S_t \sigma_t b_t \rho \frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma}$

Essayons de trouver une stratégie autofinçante qui réplique une fonction déterministe  $C$  (qui donnera le prix de l'option à couvrir par la suite):  $V_t = C(t, \sigma_t, S_t)$ . En appliquant la formule d'Itô, on trouve:

$$dV_t = \mathcal{L}_t C dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma} d\sigma_t,$$

et pour l'égalité entre cette expression et (4.5), les ratios de couverture et la fonction  $C$  doivent satisfaire

$$\omega_t = \frac{\partial C / \partial \sigma}{\partial C^0 / \partial \sigma} \quad (4.6)$$

$$\delta_t = \frac{\partial C}{\partial S} - \omega_t \frac{\partial C^0}{\partial S} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{L}_t C - rC + rS_t \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\mathcal{L}_t C^0 - rC^0 + rS_t \frac{\partial C^0}{\partial S}}{\partial C^0 / \partial \sigma} \quad (4.8)$$

Le deuxième facteur à droite ne dépend pas de l'option qu'on cherche à couvrir, mais seulement de l'actif "universel" qu'on a choisi initialement pour la couverture. Soit

$$\lambda(t, \sigma, S) = - \frac{\mathcal{L}_t C^0 - rC^0 + rS \frac{\partial C^0}{\partial S}}{\partial C^0 / \partial \sigma}$$

Nous avons démontré par réplication que le prix d'une option européenne de payoff  $h(S_T)$  satisfait:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t C - rC + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \lambda(t, \sigma, S) \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0, \quad C(T, \sigma, S) = h(S) \\ \text{avec } \mathcal{L}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + S \sigma b_t \rho \frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma} \end{aligned} \quad (4.9)$$

C'est la généralisation de l'équation de Black-Scholes aux modèles de volatilité stochastique. La couverture avec des actions et des actifs risqués d'un autre type avec des ratios (4.6)–(4.7) s'appelle la couverture en delta-vega (risque de vega = risque de volatilité). Graphique 4.3 illustre la performance de cette stratégie dans le modèle de Heston (voir ci-dessus) en comparant dynamiquement la valeur de l'option avec le portefeuille de couverture correspondant. On voit qu'effectivement, la couverture avec deux actifs élimine complètement le risque.

**Evaluation risque-neutre** L'EDP de pricing (4.9) est une équation en 3 dimensions qui n'est pas toujours facile à résoudre. Il serait plus satisfaisant d'exprimer le prix d'une option européenne dans un modèle de volatilité stochastique comme espérance, pour le calculer, par exemple, avec une méthode de Monte Carlo. Les prix des actifs cotés sont des espérances actualisés de leurs flux terminaux sous la probabilité risque-neutre, sous laquelle toute option satisfait

$$dC_t = rC_t dt + \text{martingale.}$$

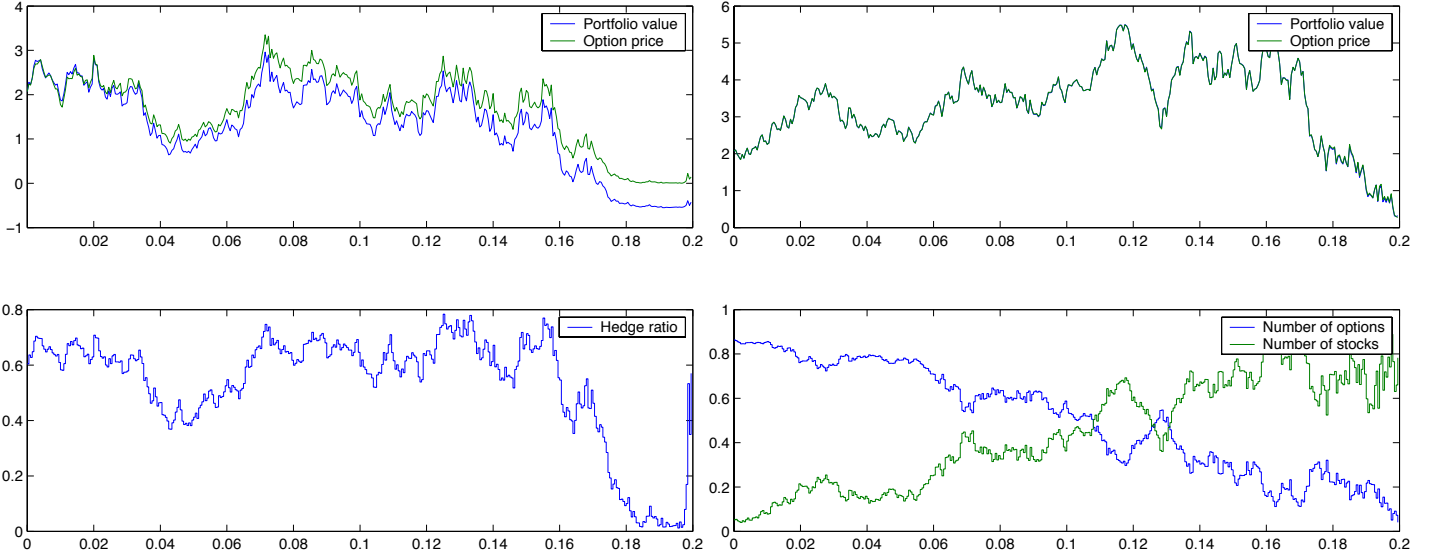


Figure 4.3: Couverture en vega. Gauche: couverture en delta seulement dans un marché à volatilité stochastique. Droite: couverture en delta-vega.

Or, en utilisant la formule d'Itô et (4.6)–(4.8), on trouve

$$dC_t = rC_t dt + \frac{\partial C}{\partial S}(dS_t - rS_t dt) + \frac{\partial C}{\partial \sigma}(d\sigma_t - \lambda_t dt),$$

donc, sous la probabilité risque-neutre  $Q$  on aura

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sigma_t d\tilde{W}_t \\ d\sigma_t &= \lambda_t dt + b_t d\tilde{W}'_t, \end{aligned}$$

où  $\tilde{W}$  et  $\tilde{W}'$  sont  $Q$ -mouvements browniens avec  $d\langle \tilde{W}, \tilde{W}' \rangle_t = \rho dt$ . La “fonction universelle”  $\lambda$ , que nous avons rencontré pour la première fois dans l'équation de pricing (4.9) joue donc le rôle de la dérive de volatilité sous la probabilité risque-neutre.

Sous  $Q$ , le prix d'une option européenne de payoff  $h$  satisfait

$$C(t, \sigma, S) = E[e^{-r(T-t)} h(S_T) | \sigma_t = \sigma, S_t = S]$$

Sous la condition  $\sigma_t > 0$  et  $b_t > 0$ , le modèle (4.3)–(4.4) peut être réécrit

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= (r + \beta_t \sigma_t) dt + \sigma_t dW_t \\ d\sigma_t &= (\lambda_t + \phi_t b_t) dt + b_t dW'_t, \end{aligned}$$

Le coefficient  $\beta_t$  qui permet de passer de la probabilité risque-neutre à la probabilité historique est traditionnellement appelé la *prime de risque*. Par analogie, on appelle souvent  $\phi_t$  la *prime de risque de volatilité*.

**Exercice 1.** Sous l'hypothèse que les primes de risque  $\beta_t$  et  $\phi_t$  sont bornées, montrer comment on peut construire la probabilité risque-neutre  $Q$  à l'aide du théorème de Girsanov.

**Remarque 1.** Une différence fondamentale entre  $\beta_t$  et  $\phi_t$  est que  $\beta_t$  est facile à estimer comme  $\frac{\mu_t - r}{\sigma_t}$  alors que pour estimer  $\phi_t$  on devrait estimer  $\lambda_t$  à partir de données historiques, ce qui n'est en général pas possible. Une solution consiste à spécifier une forme paramétrique pour  $\lambda_t$  qui sera calibrée directement sous la probabilité risque-neutre, aux prix d'options cotés sur le marché. On reviendra sur ce point dans la discussion des paramétrisations de volatilité stochastique.

## 4.2 Application à l'arbitrage de volatilité

Dans la section précédente nous avons vu que dans un modèle à volatilité stochastique, la probabilité risque-neutre ne peut pas être identifiée à partir des données historiques du prix et de la volatilité, car ces données ne contiennent pas d'information sur le drift risque-neutre  $\lambda$ . Cependant, les autres coefficients de la dynamique de la volatilité (à savoir, la corrélation  $\rho$  et la volatilité de volatilité  $b$ ) sont les mêmes sous la probabilité historique et la probabilité risque-neutre. L'utilisation par un agent de marché dans sa méthode de pricing de paramètres  $\rho$  et  $b$  autres que ceux observés historiquement conduirait, en principe, à des opportunités d'arbitrage. Dans cette section, suivant [38] nous donnerons un exemple de telles opportunités, ce qui nous permettra au passage d'obtenir une interprétation intéressante des contrats "risk reversal" et "butterfly" en terme de leur optimalité pour arbitrage de volatilité.

Supposons que sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ , l'actif risqué  $S$  suit un modèle à volatilité stochastique

$$dS_t/S_t = \mu_t dt + \sigma_t \sqrt{1 - \rho_t^2} dW_t^1 + \sigma_t \rho_t dW_t^2$$

où  $\mu, \sigma > 0$  et  $\rho \in [-1, 1]$  sont des processus adaptés tels que

$$\int_0^t S_s^2 (1 + \mu_s^2 + \sigma_s^2) ds < \infty \quad \text{p.s. pour tout } t$$

et  $(W^1, W^2)$  est un mouvement brownien standard 2-dimensionnel. Nous nous plaçons au point de vue d'un agent informé, qui a constaté que tous les autres agents du marché valorisent les options en utilisant le modèle de Black et Scholes avec volatilité implicite variable  $\tilde{\sigma}_t$ , dont la dynamique est

$$d\tilde{\sigma}_t = a_t dt + b_t dW_t^2, \quad (4.10)$$

où  $a_t$  et  $b_t > 0$  sont des processus adaptés tels que

$$\int_0^t (a_s^2 + b_s^2) ds < \infty \quad \text{p.s. pour tout } t.$$

On suppose que sur le marché sont cotées des options européennes (call ou put) pour tous les strikes  $K$  et au moins une maturité  $T$ . Le prix d'une telle option de strike  $K$  à l'instant  $t$  sera noté par  $P_K(S_t, \tilde{\sigma}_t, t)$  ( $P^K$  est ici la fonction de prix Black-Scholes).

Pour réaliser un arbitrage potentiel, l'agent informé constitue un portefeuille dynamique contenant  $\delta_t$  unités du sous-jacent,  $B_t$  en cash et une quantité infinitésimale de chaque option d'échéance  $T$ . La quantité d'options de strike entre  $K$  et  $K + dK$  est donnée par  $\omega_t(dK)$ , où  $\omega_t$  est un processus prévisible à valeurs dans l'espace des mesures signées sur  $[0, \infty)$ . La valeur du portefeuille est alors donnée par

$$X_t = \int P_K(S_t, Y_t, t) \omega_t(dK) + \delta_t S_t + B_t.$$

Pour que le portefeuille soit localement sans risque, il est choisi delta et vega-neutre. De plus, pour limiter la taille des positions, on suppose que la quantité totale d'options est normalisée à 1:  $\int |\omega_t(dK)| = 1$ . La dynamique du portefeuille est alors donnée par

$$\begin{aligned} dX_t &= \left( \int \omega_t(dK) \mathcal{L}P^K \right) dt + \left( \int \omega_t(dK) \frac{\partial P^K}{\partial S} \right) dS_t \\ &\quad + \left( \int \omega_t(dK) \frac{\partial P^K}{\partial \sigma} \right) d\tilde{\sigma}_t + \delta_t dS_t, \\ \mathcal{L}f &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{S_t^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{b_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + S_t \sigma_t b_t \rho_t \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial \sigma}, \end{aligned}$$

et avec les contraintes de delta et vega-neutralité,

$$\int \omega_t(dK) \frac{\partial P^K}{\partial \sigma} = 0, \quad \int \omega_t(dK) \frac{\partial P^K}{\partial S} - \delta_t = 0$$

on a

$$dX_t = \int \omega_t(dK) \mathcal{L}P^K dt.$$

Finalement, puisque le prix  $P^K$  vérifie l'EDP de Black-Scholes, le profit d'arbitrage instantané est donné par

$$dX_t = \int \omega_t(dK) \left( \frac{S_t^2(\sigma_t^2 - \tilde{\sigma}_t^2)}{2} \frac{\partial^2 P^K}{\partial S^2} + \frac{b_t^2}{2} \frac{\partial^2 P^K}{\partial \sigma^2} + S_t \sigma_t b_t \rho_t \frac{\partial^2 P^K}{\partial S \partial \sigma} \right) dt.$$

Avec les expressions explicites pour les grèques dans le modèle de Black-Scholes ( $r = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= Sn(d_1)\sqrt{\tau} = Kn(d_2)\sqrt{\tau}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} &= \frac{n(d_1)}{S\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma \partial S} &= -\frac{n(d_1)d_2}{\tilde{\sigma}}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} &= \frac{Sn(d_1)d_1d_2\sqrt{\tau}}{\tilde{\sigma}}, \end{aligned}$$

où  $d_{1,2} = \frac{\log(S/K)}{\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}} \pm \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$  et  $\tau = T - t$ , cela se réécrit encore

$$dX_t = \left\{ \frac{Sb^2\sqrt{\tau}}{2\tilde{\sigma}} \int z^2 n(z) \bar{\omega}(dz) - Sb(b\tau/2 + \rho\sigma/\tilde{\sigma}) \int zn(z) \bar{\omega}(dz) \right\} dt, \quad (4.11)$$

où l'on a fait le changement de variable  $z = \frac{\log(S/K)}{\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}} + \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}}{2}$ , et  $\bar{\omega}$  est la mesure  $\omega$  exprimée avec la nouvelle variable (à partir de maintenant on supprime l'indice  $t$  pour alléger la notation, mais tous les processus et stratégies sont bien entendu dépendants du temps). Pour maximiser le profit d'arbitrage, l'expression ci-dessus doit être maximisée sous les contraintes

$$\int n(z) \bar{\omega}(dz) = 0, \quad \int |\bar{\omega}(dz)| = 1. \quad (4.12)$$

**Proposition 3.** *La mesure optimale  $\bar{\omega}^*$  maximisant (4.11) sous les contraintes (4.12) est donnée par*

$$\bar{\omega}^* = w_1 \delta_{z_1^*} - w_2 \delta_{z_2^*}$$

où

$$w_1 = \frac{n(z_1^*)}{n(z_1^*) + n(z_2^*)}, \quad w_2 = \frac{n(z_2^*)}{n(z_1^*) + n(z_2^*)}$$

et

$$(z_1^*, z_2^*) = \arg \max_{z_1, z_2} \frac{f(z_1)n(z_2) - f(z_2)n(z_1)}{n(z_1) + n(z_2)},$$

avec

$$f(z) = \frac{Sb^2\sqrt{\tau}}{2\tilde{\sigma}} z^2 n(z) - Sb(b\tau/2 + \rho\sigma/\tilde{\sigma}) zn(z).$$

*Preuve.* De manière évidente, la mesure proposée vérifie les contraintes. Soit  $\bar{\omega}$  une autre mesure qui les vérifie, et  $\bar{\omega} = \bar{\omega}^+ - \bar{\omega}^-$  sa décomposition de Jordan. On introduit des mesures de probabilité  $\nu^+ := \frac{\bar{\omega}^+}{\bar{\omega}^+(\mathbb{R})}$  et  $\nu^- := \frac{\bar{\omega}^-}{\bar{\omega}^-(\mathbb{R})}$ . Il est alors clair que

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^-(\mathbb{R}) &= \frac{\int n(z) \nu^+(dz)}{\int n(z) \nu^+(dz) + \int n(z) \nu^-(dz)}, \\ \bar{\omega}^+(\mathbb{R}) &= \frac{\int n(z) \nu^-(dz)}{\int n(z) \nu^+(dz) + \int n(z) \nu^-(dz)} \end{aligned}$$



et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int f(z)\bar{\omega}(dz) &= \int f(z)\bar{\omega}^+(dz) - \int f(z)\bar{\omega}^-(dz) \\
&= \frac{\int f(z)\nu^+(dz) \int n(z)\nu^-(dz) - \int f(z)\nu^-(dz) \int n(z)\nu^+(dz)}{\int n(z)\nu^+(dz) + \int n(z)\nu^-(dz)} \\
&= \frac{\int \nu^-(dz) \{n(z) \int f(z)\nu^+(dz) - f(z) \int n(z)\nu^+(dz)\}}{\int n(z)\nu^+(dz) + \int n(z)\nu^-(dz)} \\
&\leq \frac{\int \nu^-(dz) \{n(z) + \int n(z')\nu^+(dz')\} \sup_z \frac{n(z) \int f(z')\nu^+(dz') - f(z) \int n(z')\nu^+(dz')}{n(z) + \int n(z')\nu^+(dz')}}{\int n(z)\nu^+(dz) + \int n(z)\nu^-(dz)} \\
&= \sup_z \frac{n(z) \int f(z')\nu^+(dz') - f(z) \int n(z')\nu^+(dz')}{n(z) + \int n(z')\nu^+(dz')} \leq \sup_{z,z'} \frac{n(z)f(z') - f(z)n(z')}{n(z) + n(z')}
\end{aligned}$$

□

**Cas particuliers** Supposons que la volatilité de volatilité est petite ( $b \rightarrow 0$ ). Alors le terme  $Sb\rho\sigma/\bar{\sigma}$  dans (4.11) domine les autres, et le problème consiste à maximiser  $-\int zn(z)\bar{\omega}(dz)$ , uniquement sous la contrainte  $\int |\bar{\omega}(dz)| = 1$ , puisque la contrainte de vega est automatiquement vérifiée (la solution étant une mesure asymétrique). Il suffit de considérer uniquement la partie de la mesure  $\bar{\omega}$  supportée par  $(0, \infty)$  ce qui revient à maximiser

$$\int_{(0,\infty)} zn(z)\omega^+(dz) \quad \text{sous contrainte} \quad \int_{(0,\infty)} \omega^+(dz) = \frac{1}{2}.$$

La solution est de placer une masse  $\frac{1}{2}$  au point  $z^* = \arg \max_z zn(z) = 1$ :

- Si  $\rho \geq 0$ ,
  - acheter  $\frac{1}{2}$  unités d'options dont le delta est  $N(-1) \approx 0.16$ ;
  - vendre  $\frac{1}{2}$  unités d'options dont le delta est  $N(1) \approx 0.84$ ;
- Si  $\rho < 0$ , utiliser la stratégie opposée.

Cette stratégie s'appelle le 16-delta risk reversal dans les marchés de change.

Supposons maintenant que  $\rho$  est inconnue, et qu'on ne cherche à optimiser que le premier terme dans (4.11). Dans ce cas la solution est une mesure symétrique, et considérant uniquement la moitié droite de  $\bar{\omega}$ , il faut maximiser

$$\int_{[0,\infty)} z^2 n(z)\bar{\omega}(dz) \quad \text{sous contraintes} \quad \int_{[0,\infty)} n(z)\bar{\omega}(dz) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{[0,\infty)} \bar{\omega}(dz) = \frac{1}{2}.$$

Comme dans la proposition ci-dessus, la solution optimale consiste à placer deux masses ponctuelles aux points  $z_1$  et  $z_2$  solutions de

$$(z_1, z_2) = \arg \max \frac{n(z_1)n(z_2)(z_2^2 - z_1^2)}{n(z_1) + n(z_2)} = \arg \max \frac{z_2^2 - z_1^2}{e^{z_1^2/2} + e^{z_2^2/2}}.$$

Les valeurs explicites sont  $z_1 = 0$  et  $z_2 = \arg \max \frac{z^2}{1+e^{z^2/2}} \approx 1.6$ . Le contrat optimal est donc

- Acheter  $x$  unités d'options dont le delta est  $N(z_2) \approx 0.055$ ;
- Acheter  $x$  unités d'options dont le delta est  $N(-z_2) \approx 0.945$ ;
- Vendre  $1 - 2x$  unités d'options à la monnaie (dont le delta est  $N(0) = 0.5$ ).

Cette stratégie s'appelle le 5.5-delta vega weighted butterfly dans les marchés de change. On remarquera le caractère indépendant du modèle des contrats optimaux.

### 4.3 Estimation de volatilité

Dans la section précédente nous avons vu qu'en théorie, dans un modèle à volatilité stochastique avec 2 facteurs de risque, toute option est répliquée par un portefeuille contenant des actions et un actif risqué additionnel. En réalité, pour calculer les ratios de couverture (4.6) et (4.7) et le prix de l'option, il faut connaître la volatilité instantanée  $\sigma_t$  qui n'est pas directement observable. On peut approcher  $\sigma_t$  par la volatilité moyenne sur une période de longueur  $T$ , qui est estimable à partir de données historiques, mais

- La variance de l'estimateur de volatilité moyenne décroît avec  $T$
- Le biais de l'approximation de  $\sigma_t$  par la volatilité moyenne croît avec  $T$

En général, même avec des données haute fréquence, on ne peut connaître  $\sigma_t$  qu'avec une précision de 10% au mieux, ce qui introduit un risque additionnel (risque de modèle) dans la procédure de couverture. Dans cette section on se propose de regarder les méthodes d'estimation de volatilité moyenne à partir de données historiques.

**Estimateurs de variance réalisée** Soit  $(S_t)$  un processus de prix avec volatilité stochastique:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Alors

$$d \log S_t = \left( \mu_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dW_t \quad (4.13)$$

et la variation quadratique de  $\log S_t$  satisfait

$$\langle \log S \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

D'un autre coté, la variation quadratique d'une sémimartingale est définie par

$$\langle X \rangle_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (X_{\frac{i}{N}t} - X_{\frac{i-1}{N}t})^2,$$

où la convergence a lieu presque sûrement. Avec la notation

$$r(t, h) \equiv \log \frac{S_{t+h}}{S_t}$$

pour le log-rendement du processus de prix, on a donc

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N r \left( \frac{i-1}{N}t, \frac{t}{N} \right)^2.$$

Ceci suggère qu'on peut estimer la variance intégrée  $\int_0^t \sigma_s^2 ds$  par la *variance réalisée*

$$VR_t^N \equiv \sum_{i=1}^N r \left( \frac{i-1}{N}t, \frac{t}{N} \right)^2.$$

Pour analyser le comportement de cet estimateur, on fera deux hypothèses simplifiantes:

- La volatilité ( $\sigma_t$ ) est indépendante du mouvement brownien qui dirige le sous-jacent ( $W_t$ ).
- La dérive  $\mu_t$  est déterministe.

Ces hypothèses ne sont pas nécessaires, pour voir comment on peut s'en affranchir, cf. [1].

On écrira  $E^\sigma$  pour l'espérance conditionnelle par rapport à la trajectoire de volatilité. Sous cette espérance conditionnelle,

$$R_i \equiv r \left( \frac{i-1}{N}t, \frac{t}{N} \right)$$

est une variable aléatoire Gaussienne de variance et espérance

$$v_i = \int_{\frac{i-1}{N}t}^{\frac{i}{N}t} \sigma_s^2 ds \quad \text{et} \quad m_i = \int_{\frac{i-1}{N}t}^{\frac{i}{N}t} (\mu_s - \sigma_s^2/2) ds$$

respectivement, et les variables  $R_i$  et  $R_j$  sont indépendantes pour tout  $i \neq j$ .

Dans un premier temps, on analyse le biais de l'estimateur de variance réalisée. Un calcul direct montre

$$\begin{aligned} E^\sigma [V R_t^N] &= \sum_{i=1}^N E^\sigma [R_i^2] = \sum_{i=1}^N (v_i + m_i^2) \\ &\approx \int_0^t \sigma_s^2 ds + \frac{t}{N} \int_0^t (\mu_s - \sigma_s^2/2)^2 ds, \end{aligned}$$

le biais de l'estimateur est donc de l'ordre de  $O(t/N)$ . Pour la variance conditionnelle de l'estimateur on a

$$\begin{aligned} \text{Var}^\sigma [V R_t^N] &= \sum_{i=1}^N E^\sigma [(R_i^2 - v_i - m_i^2)^2] = \sum_{i=1}^N (2v_i^2 + 4v_i m_i^2) \\ &\approx \frac{2t}{N} \int_0^t \sigma_s^4 ds + \frac{4t^2}{N^2} \int_0^t \sigma_s^2 (\mu_s - \sigma_s^2/2)^2 ds. \end{aligned}$$

Le terme dominant dans l'erreur de l'estimateur est donc dû à la variance et l'écart type de l'erreur est, au premier ordre, égal à

$$\sqrt{\frac{2t}{N} \int_0^t \sigma_s^4 ds}.$$

Ceci s'explique par le fait que l'estimateur de variance réalisée est un estimateur complètement non-paramétrique, il ne nécessite aucune hypothèse sur le modèle et n'introduit donc presque pas de biais mais au prix d'une variance assez élevée.

**Exemple 3.** Soit  $t = 1$  jour,  $N = 100$  (une donnée toutes les 5 minutes). Alors pour un niveau moyen de volatilité de 10%, on a

$$\sqrt{\frac{2t}{N} \int_0^t \sigma_s^4 ds} \approx 5 \times 10^{-6},$$

ce qui correspond à une erreur relative

$$\frac{\sqrt{\frac{2t}{N} \int_0^t \sigma_s^4 ds}}{\int_0^t \sigma_s^2 ds} \approx \sqrt{\frac{2}{N}} \approx 15\%.$$

D'un autre coté, l'écart type typique de la volatilité instantanée sur 1 jour est de  $5 \times 10^{-3}$  (paramètres de l'article de Heston [35]). La précision relative de l'estimation de la volatilité instantanée par l'estimateur de variance réalisée est donc, dans ce cas de 16%.

L'estimation de volatilité par variance réalisée est illustrée par fig. 4.4. A gauche, sur les données simulées, on compare l'estimateur de variance réalisée sur 1 jour avec la volatilité instantanée et la volatilité moyenne sur 1 jour, c'est-à-dire  $\sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds}$ . On voit qu'ici, l'écart entre la volatilité instantanée et la volatilité moyenne est petit, mais l'estimateur de variance réalisée introduit beaucoup de bruit. Sur le graphique de droite, on applique le même estimateur avec des fenêtres d'un jour et de deux jours aux données réelles. Ici également, l'importante différence entre les estimateurs pour les deux fenêtres montre que l'estimateur de variance réalisée introduit beaucoup de bruit dans le résultat final.

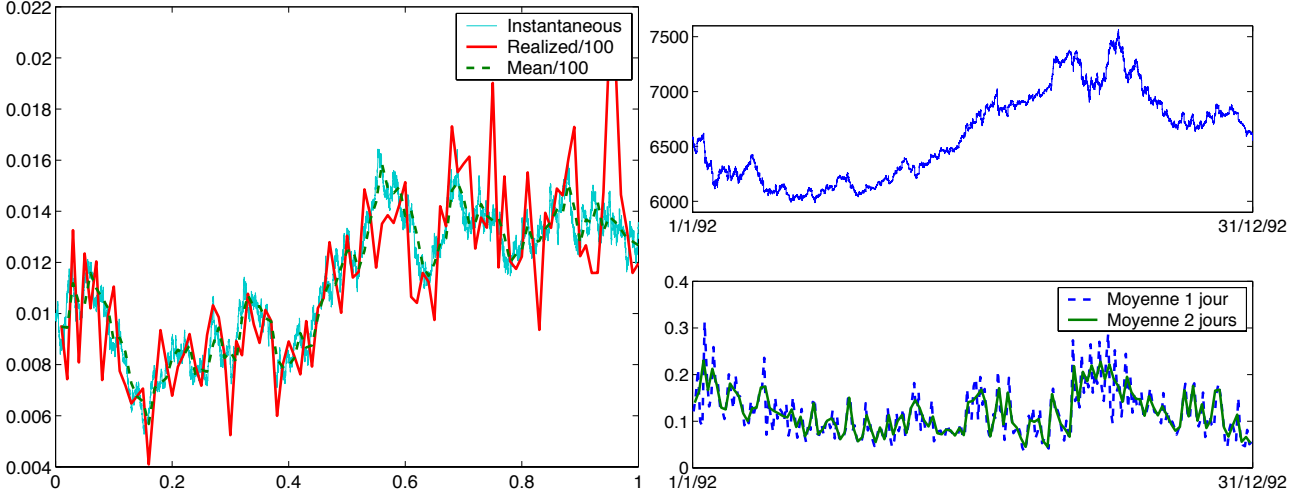


Figure 4.4: Estimateur de variance réalisée. Graphique de gauche: données simulées. Graphique de droite: données réelles. Haut: taux de change DM/USD. Bas: volatilité moyenne journalière, estimée sur les données de fréquence 5 min.

**Estimation de volatilité avec un modèle ARCH auxiliaire** Cette méthode d'estimation de volatilité introduit un lissage supplémentaire, ce qui permet de diminuer la variance de l'estimateur, au prix d'un biais plus grand. On se place dans le cadre d'un modèle *discret* à volatilité stochastique:

$$R_i = \mu_i + \sigma_i \varepsilon_i. \quad (4.14)$$

Ici,  $\{\varepsilon_i\}$  est une suite de variables aléatoires adaptée à une filtration discrète  $\{\mathcal{F}_i\}$  et telle que pour tout  $i$ ,  $\varepsilon_{i+1}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_i$  et de loi  $N(0, 1)$ . Les suites  $\{\mu_i\}$  et  $\{\sigma_i\}$  sont supposées  $\{\mathcal{F}_t\}$ -prévisibles (ceci revient à dire que  $\sigma_i$  et  $\mu_i$  sont  $\mathcal{F}_{i-1}$ -mesurables). Dans ce cas, le rendement continu  $r((i-1)h, h)$  a la même loi pour tout  $i$  que le rendement discret  $R_i = \mu_i + \sigma_i \varepsilon_i$ .

**Remarque 2.** Sous l'hypothèse de dérive déterministe et volatilité indépendante du sous-jacent, le modèle continu (4.13) observé avec fréquence  $h$  peut être réécrit sous cette forme, en prenant une suite  $\{\varepsilon_i\}$  de variables indépendantes de loi  $N(0, 1)$ , et en posant

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\} \vee \sigma\{\sigma_s : s \leq (t+1)h\}.$$

$$\mu_i = \int_{(i-1)h}^{ih} (\mu_s - \sigma_s^2/2) ds, \quad \sigma_i = \sqrt{\int_{(i-1)h}^{ih} \sigma_s^2 ds}.$$

Dans le modèle (4.14),

$$\sigma_i^2 = E[(R_i - \mu_i)^2 | \mathcal{F}_{i-1}].$$

Ceci conduit à l'idée d'approcher  $\sigma_i^2$  par une moyenne mobile des carrés des observations précédentes

$$\sigma_i^2 \approx \omega + \alpha_1 (R_{i-1} - \mu_{i-1})^2 + \dots + \alpha_n (R_{i-n} - \mu_{i-n})^2. \quad (4.15)$$

Cette méthode peut donc être considéré comme une généralisation de l'estimateur de variance réalisée. D'un autre coté, il existe une classe de modèles économétriques de volatilité, où elle a exactement la forme (4.15). Il s'agit de modèles de type ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity) [20]. Dans un modèle ARCH(n), on suppose que le processus de rendements discrets est décrit par (4.14), avec une volatilité donnée par

$$\sigma_i^2 = \omega + \alpha_1 (R_{i-1} - \mu_{i-1})^2 + \dots + \alpha_n (R_{i-n} - \mu_{i-n})^2. \quad (4.16)$$

Les moyennes  $\mu_i$  peuvent être constantes ou intégrer une éventuelle saisonnalité.

Dans ce modèle tout l'aléa provient donc de la suite  $\{\varepsilon_i\}$ , et il n'y a pas de facteurs de risque cachés ce qui facilite l'estimation. Pour estimer un modèle ARCH(n), on peut dans un premier temps utiliser la méthode de maximum de vraisemblance pour déduire les paramètres  $\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  puis filtrer la volatilité avec l'équation (4.16). Par exemple, dans le modèle ARCH(1) avec  $\mu_i \equiv \mu$  la densité jointe de  $(R_1, \dots, R_T)$  satisfait

$$p(R_1, \dots, R_T | \theta) = p(R_T | R_{T-1}, \theta) \dots p(R_2 | R_1, \theta) p(R_1),$$

où  $\theta = (\mu, \omega, \alpha_1)$  est le vecteur des paramètres inconnus et

$$\begin{aligned} p(R_i | R_{i-1}, \theta) &= \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(R_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\omega + \alpha_1(R_{i-1} - \mu)^2)}} \exp\left(-\frac{(R_i - \mu)^2}{2(\omega + \alpha_1(R_{i-1} - \mu)^2)}\right). \end{aligned}$$

La densité  $p(R_1)$  peut être Gaussienne avec une valeur de volatilité fixée à priori. Les paramètres  $(\mu, \omega, \alpha_1)$  peuvent donc être estimés avec

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log p(R_1, \dots, R_T | \theta) = \arg \max_{\theta} \left( -\sum_{i=1}^T \log \sigma_i - \sum_{i=1}^T \frac{(R_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2} \right).$$

Pour construire un estimateur fiable de volatilité avec un modèle ARCH auxiliaire, on est obligé de choisir  $n$  suffisamment grand et donc d'estimer beaucoup de paramètres. Pour une description plus parcimonieuse, les modèles GARCH (generalized ARCH) ont été proposés [4], qui permettent à la volatilité  $\sigma_i$  de dépendre non seulement des rendements passés mais aussi des valeurs passées de volatilité elle-même. Le modèle GARCH(m,n) a donc la forme

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^n \alpha_i (R_{t-i} - \mu_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^m \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

L'avantage de cette approche est que pour obtenir des bons résultats on a rarement besoin d'aller au-delà de GARCH(1,1).

Pour estimer la volatilité dans un modèle à volatilité stochastique, une méthode possible consiste donc à substituer la volatilité stochastique par une volatilité de type ARCH ou GARCH. En le faisant, on introduit un biais dû au fait qu'on n'utilise pas le bon modèle, mais en vue de l'équation (4.15) on peut espérer avoir une approximation à la vraie volatilité. Graphique 4.5 montre la performance de l'estimateur fondé sur un modèle GARCH(1,1) auxiliaire sur les mêmes données qui ont été utilisées pour tester l'estimateur de variance réalisée (fig. 4.4). On voit que maintenant, l'estimateur contient beaucoup moins de bruit, mais que la volatilité estimée est parfois différente de la vraie volatilité en raison d'un lissage indésirable par le modèle GARCH.

## 4.4 Paramétrisation de Heston

Dans sa version risque-neutre, le modèle de Heston [35] a la forme:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sigma_t dW_t \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\theta - \sigma_t^2)dt + \delta\sigma_t dW'_t, \quad d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt \\ \text{où encore } dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \delta\sqrt{v_t}dW'_t \quad \text{avec } v_t = \sigma_t^2 \end{aligned}$$

Le processus de la variance  $v_t$  est connu sous le nom de processus racine carrée. Il a été introduit par Cox, Ingersoll et Ross [12] pour modéliser le taux d'intérêt court. Ce processus reste positif et retourne à la moyenne  $\theta$  avec vitesse caractéristique  $\kappa$ . Le paramètre  $\delta$  joue le rôle de volatilité de volatilité. Le comportement dynamique du processus dépend des grandeurs relatives des paramètres: si  $\frac{2\kappa\theta}{\delta^2} > 1$ , le processus ne touche jamais zéro; dans le cas contraire il peut toucher zéro et réfléchir. Dans cette dernière situation, on rencontre des difficultés de simulation de ce processus: puisque la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  n'est pas Lipschitz en zéro, le schéma d'Euler

$$v_{t+\Delta t} = v(t) + \kappa(\theta - v_t)\Delta t + \delta\sqrt{v_t}\Delta W'_t$$

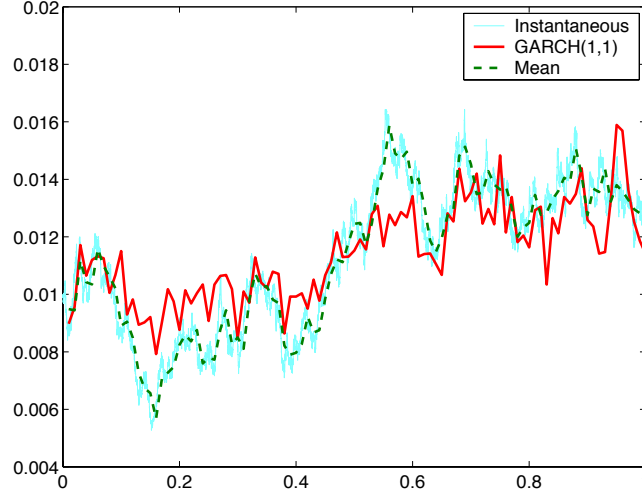


Figure 4.5: Estimation de volatilité avec un modèle GARCH(1,1) auxiliaire.

converge très lentement. De plus, même si le processus continu reste toujours positif, le processus discrétisé peut devenir négatif. Cette difficulté est généralement évitée en remplaçant  $\sqrt{v_t}$  par  $\sqrt{|v_t|}$  ou  $\sqrt{v_t^+}$ , mais ceci ne résout pas le problème de convergence. Pour voir comment améliorer la convergence avec un schéma d'ordre élevé, voir [26, 29]. Il existe également des algorithmes de simulation exacte (sans discrétisation) — voir [5] — mais ils ne sont pas toujours les plus rapides.

Pour mieux comprendre les propriétés du modèle, on peut réécrire le processus racine carrée comme

$$v_t = \theta + e^{-\kappa t}(v_0 - \theta) + \delta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} \sqrt{v_s} dW'_s.$$

Dans cette forme on voit immédiatement que le processus “oublie” sa valeur initiale et retourne vers la moyenne  $\theta$  exponentiellement vite avec vitesse  $\kappa$ . La moyenne du processus est

$$E[v_t] = e^{-\kappa t}(v_0 - \theta) + \theta$$

et la variance

$$\text{Var}[v_t] = \frac{\delta^2 \theta}{2\kappa} + \frac{\delta^2 (v_0 - \theta)}{\kappa} e^{-\kappa t} + \frac{\delta^2 (\theta - 2v_0)}{2\kappa} e^{-2\kappa t}.$$

Si  $t$  est petit,

$$\text{Var}[v_t] = v_0 \delta^2 t,$$

ce qui explique le terme “volatilité de volatilité”.

Remarquons au passage que

$$\frac{1}{T} E \left[ \int_0^T v_t dt \right] = \theta + (v_0 - \theta) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa T},$$

ce qui permet de calculer facilement le prix d'un swap de variance.

Les paramètres dans l'article original de Heston [35] sont  $\kappa = 2$ ,  $\theta = 0.01$ ,  $\delta = 0.1$  et  $v_0 = 0.01$ . Pour ces valeurs, l'écart type de variance sur un jour ( $T = 4 \cdot 10^{-3}$ ) est de  $\approx 6 \cdot 10^{-4}$ . Si on remplace la variance instantanée par la variance intégrée sur 1 jour, on fait donc une erreur relative de 6%.

**Exercice 2.** Calculer la variance de la variance moyenne  $\text{Var}I_T$  dans le modèle de Heston. Montrer que  $\text{Var}I_T \sim O(T)$  quand  $T \rightarrow 0$ .

**Valorisation d'options européennes** Section 4.5 décrit une méthode rapide pour calculer les prix des options européennes dans un modèle où on connaît explicitement la fonction caractéristique du log-prix. Le modèle de Heston appartient à la classe de modèles dits affines [16, 17], et pour tous les modèles dans cette classe, la fonction caractéristique est connue. Ici on explique la méthode de calcul pour le modèle de Heston seulement.

Le log-prix  $X_t$  est défini par  $S_t = S_0 e^{rt+X_t}$  où le taux d'intérêt a été introduit pour simplifier les calculs par la suite. Le processus  $(X_t)$  satisfait l'EDS

$$dX_t = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_t$$

Par le lemme d'Itô, la fonction caractéristique conditionnelle de  $X_T$ ,

$$f(t, v, x) = E[e^{iuX_T} | X_t = x, v_t = v],$$

satisfait:

$$\frac{v}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho \delta v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + \frac{\delta^2 v}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

avec condition finale  $f(T, v, x) = e^{iux}$ .

Cherchons la solution sous la forme :

$$f(t, v, x) = \Phi(t, v) e^{iux}. \quad (4.17)$$

Alors l'équation devient:

$$\frac{\delta^2 v}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + (iu\rho\delta v + \kappa(\theta - v)) \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{v}{2}(u^2 + iu)\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

avec condition finale  $\Phi(T, v) = 1$ . Grâce à la structure affine des coefficients, on devine encore une fois la forme de la solution:

$$\Phi(t, v) = \exp\{\theta C(T-t) + vD(T-t)\}. \quad (4.18)$$

L'équation se décompose alors en 2 équations différentielles ordinaires:

$$D'(t) = \frac{\delta^2}{2} D^2 + (iu\rho\delta - \kappa)D - \frac{u^2 + iu}{2}, \quad D(0) = 0 \quad (4.19)$$

$$C'(t) = \kappa D, \quad C(0) = 0 \quad (4.20)$$

Ces EDO pour  $C$  et  $D$  ont des solutions explicites:

$$D(t) = -\frac{u^2 + iu}{\gamma \coth \frac{\gamma t}{2} + \kappa - i\rho\delta u}, \quad (4.21)$$

$$C(t) = \frac{\kappa t(\kappa - i\rho\delta u - \gamma)}{\delta^2} - \frac{2\kappa}{\delta^2} \ln \left( \frac{1}{2}(1 + e^{-\gamma t}) + \frac{\kappa - i\rho\delta u}{2\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \right), \quad (4.22)$$

où  $\gamma = \sqrt{\delta^2(u^2 + iu) + (\kappa - i\rho\delta u)^2}$ . Finalement, en rassemblant équations (4.17)–(4.18), on trouve la fonction caractéristique non-conditionnelle de  $(X_t)$ :

$$E[e^{iuX_T}] = e^{\theta C(T) + v_0 D(T)}.$$

**Remarque 3.** L'écriture (4.17)–(4.18) des facteurs  $C$  et  $D$  de la fonction caractéristique de Heston est “optimisée” pour les calculs numériques: l'expression sous le signe de logarithme n'explose pas pour  $u$  grand, et reste dans le domaine de continuité de la fonction log (la fonction de logarithme complexe dans la plupart des bibliothèques numériques a une discontinuité sur le demi-axe  $(-\infty, 0]$ ). Voir [44] pour une discussion approfondie de ce problème

**Explosions des moments dans le modèle de Heston** L'analyse détaillée des équations (4.19) et (4.20) [39] montre que  $E[e^{uX_T}]$  (et donc  $E[S_T^u]$ ) est fini si et seulement si  $T < T^*(u)$ , où

$$T^*(u) = \begin{cases} +\infty, & \Delta(u) \geq 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \left( \arctan \frac{\sqrt{-\Delta(u)}}{\rho\delta u - \kappa} + \pi 1_{\rho\delta u - \kappa < 0} \right), & \Delta(u) < 0, \end{cases}$$

where  $\Delta(u) = (\kappa - u\rho\delta)^2 - \delta^2(u^2 - u)$ .

Cela a comme conséquence que les prix de certaines options dont le pay-off n'est pas à croissance sous-linéaire (de telles options existent en particulier dans le domaine de taux d'intérêt) peuvent exploser dans le modèle de Heston. Cette formule donne par ailleurs le moyen de calculer les asymptotiques de la volatilité implicite pour les valeurs extrêmes de strike dans le modèle de Heston (voir théorème 2), mais les formules qu'on obtient ne sont pas très explicites.

**Volatilité implicite dans le modèle de Heston** Les quatre graphiques de fig. 4.6 illustrent le rôle de différents paramètres du modèle de Heston pour la description du smile de volatilité implicite. On voit que les trois paramètres  $v_0$ ,  $\rho$  et  $\delta$  déterminent respectivement le niveau, la pente et la convexité du smile à une maturité donnée, alors que  $\theta$  et  $\kappa$  jouent sur la structure par terme de volatilité implicite. Graphique 4.7 montre une surface typique de volatilité implicite dans le modèle de Heston.

**Calibration du modèle de Heston** Dans cette dernière section on présente un étude de cas de calibration du modèle de Heston aux données réelles. Nous avons pris les prix de clôture des calls et puts sur l'indice S&P 500 (source: Datastream). Le taux de dividende a été estimé avec la parité call-put à la monnaie. Seulement les options hors de la monnaie avec prix  $> \$0.25$  utilisées et la calibration a été effectuée par moindres carrées avec points de départ différents pour éviter de tomber dans un minimum local. Les résultats sont représentés sur les trois graphiques du fig. 4.8. On voit que le modèle reproduit correctement la pente de la volatilité implicite aux grandes maturités (même pour plusieurs maturités en même temps), mais n'arrive pas à expliquer la convexité aux très courtes maturités. Ceci est du au fait que sur une échelle de temps courte la volatilité ne peut pas changer de manière significative, et le modèle se comporte comme le modèle Black-Scholes.

## 4.5 Méthode de transformée de Fourier pour la valorisation d'options européennes

Let  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  be a stochastic process on  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  such that  $e^{X_t}$  is a martingale. In order to compute the price of a call option

$$C(K) = e^{-rT} E[(S_0 e^{rT+X_T} - K)^+] = S_0 E \left[ \left( e^{X_T} - \frac{K e^{-rT}}{S_0} \right)^+ \right] := S_0 E \left[ (e^{X_T} - e^k)^+ \right],$$

we would like to express its Fourier transform in adjusted log strike  $k := \log \frac{K e^{-rT}}{S_0}$  in terms of the characteristic function  $\Phi_T(v)$  of  $X_T$  and then find the prices for a range of strikes by Fourier inversion. However we cannot do this directly because  $C$  as function of  $k$  is not integrable (it tends to a positive constant as  $k \rightarrow -\infty$ ). The key idea is to instead compute the Fourier transform of the time value of the option (which we also renormalize to get rid of  $S_0$ ), that is, the function

$$z_T(k) = E[(e^{X_T} - e^k)^+] - (1 - e^k)^+. \quad (4.23)$$

**Proposition 4.** Let  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  be a stochastic process on  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  such that  $e^{X_t}$  is a martingale and

$$E[e^{(1+\alpha)X_t}] < \infty \quad \forall t \quad (4.24)$$

for some  $\alpha > 0$ . Then the Fourier transform of the time value of a call option is given by:

$$\zeta_T(v) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} z_T(k) dk = \frac{\Phi_T(v - i) - 1}{iv(1 + iv)} \quad (4.25)$$



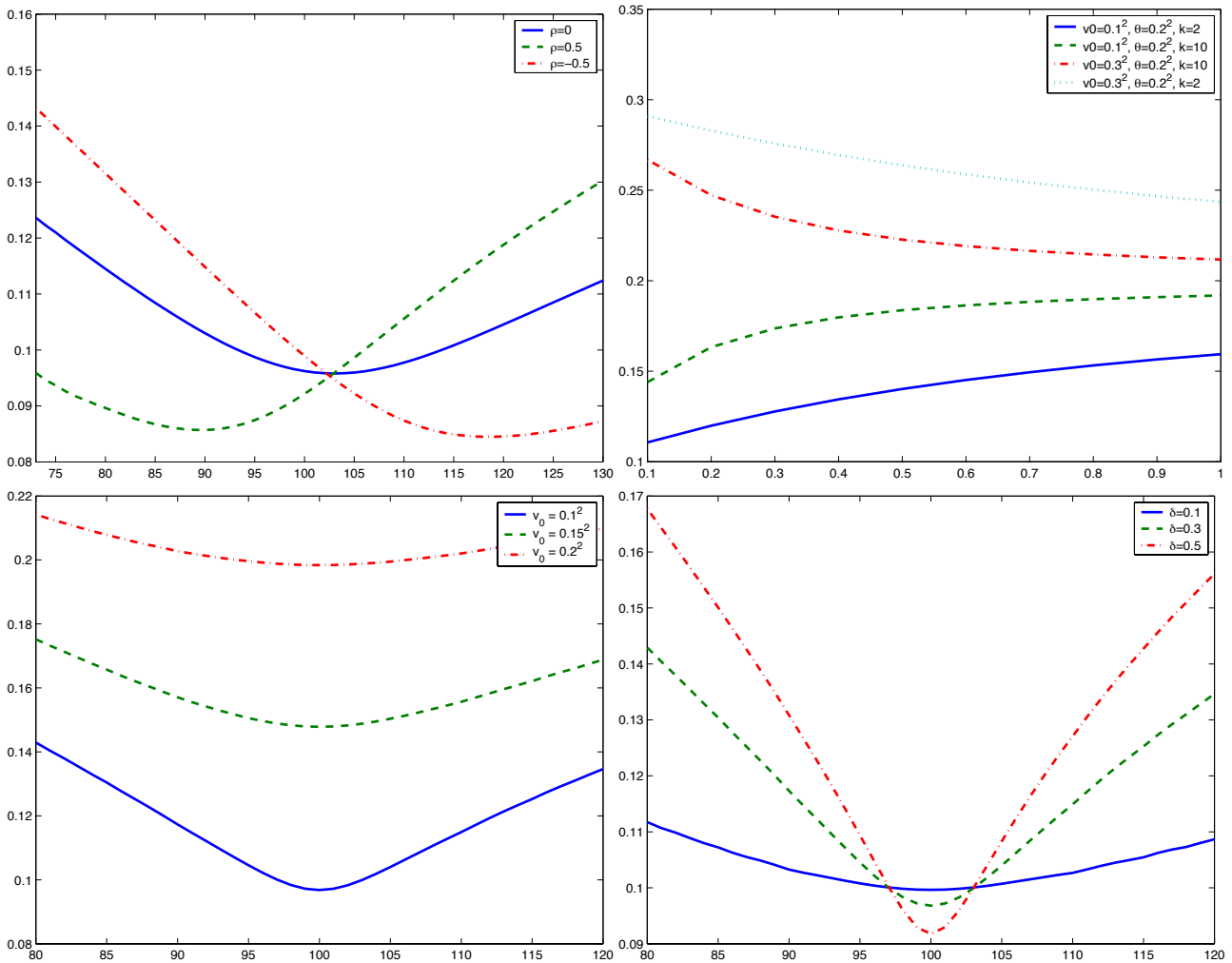


Figure 4.6: Influence de différents paramètres du modèle de Heston sur le comportement de la volatilité implicite. En haut à gauche: influence de la corrélation. En haut à droite: influence de  $\kappa$  et  $\theta$  sur la structure par terme. En bas à gauche: influence du niveau initial de volatilité  $v_0$ . En bas à droite: influence la volatilité de volatilité  $\delta$ .

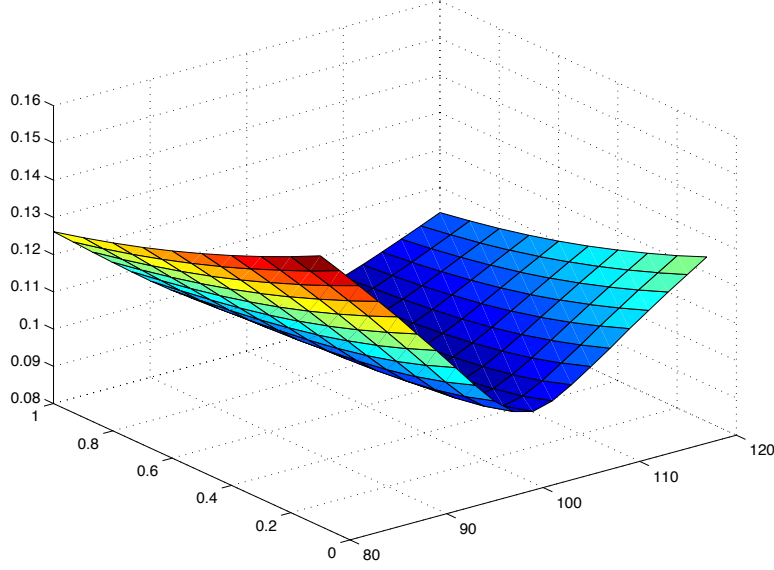


Figure 4.7: Surface de volatilité implicite dans le modèle de Heston.

The option prices can be found by inverting the Fourier transform:

$$C(K) = (S_0 - Ke^{-rT})^+ + \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iv \log(Ke^{-rT}/S_0)} \frac{\Phi_T(v-i) - 1}{iv(1+iv)}.$$

**Remarque 4.** Since typically  $\Phi_T(z) \rightarrow 0$  as  $\Re z \rightarrow \infty$ ,  $\zeta_T(v)$  will behave like  $|v|^{-2}$  at infinity which means that the truncation error in the numerical evaluation of the inverse Fourier transform will be large. The reason of such a slow convergence is that the time value (4.23) is not smooth; therefore its Fourier transform does not decay sufficiently fast at infinity. For most models the convergence can be improved by replacing the time value with a smooth function of strike. Namely, instead of subtracting the intrinsic value of the option (which is non-differentiable) from its price, we suggest to subtract the Black-Scholes call price with a non-zero volatility (which is a smooth function). The resulting function will be both integrable and smooth. Suppose that the hypothesis of the above proposition is satisfied and denote

$$\tilde{z}_T(k) = E[(e^{X_T} - e^k)^+] - \frac{1}{S_0} c_{BS}^\Sigma(k),$$

where  $c_{BS}^\Sigma(k)$  is the Black-Scholes price of a call option with volatility  $\Sigma$  and log-strike  $k$  for the same underlying value and the same interest rate. The above proposition implies that the Fourier transform of  $\tilde{z}_T(k)$ , denoted by  $\tilde{\zeta}_T(v)$ , satisfies

$$\tilde{\zeta}_T(v) = \frac{\Phi_T(v-i) - \Phi_T^\Sigma(v-i)}{iv(1+iv)}, \quad (4.26)$$

where  $\Phi_T^\Sigma(v) = \exp(-\frac{\Sigma^2 T}{2}(v^2 + iv))$ . Since for most models found in the literature (except variance gamma) the characteristic function decays faster than every power of its argument at infinity, this means that the expression (4.26) will also decay faster than every power of  $v$  as  $\Re v \rightarrow \infty$ , and the integral in the inverse Fourier transform will converge very fast for every  $\Sigma > 0$ . The option prices can be found via

$$C(K) = \text{Call}_{BS}^\Sigma(K) + \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iv \log(Ke^{-rT}/S_0)} \frac{\Phi_T(v-i) - \Phi_T^\Sigma(v-i)}{iv(1+iv)}.$$

*Proof of Proposition 4.* First, we note that since the discounted price process is a martingale, we can write

$$z_T(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(dx) (e^x - e^k) (1_{k \leq x} - 1_{k \leq 0}),$$

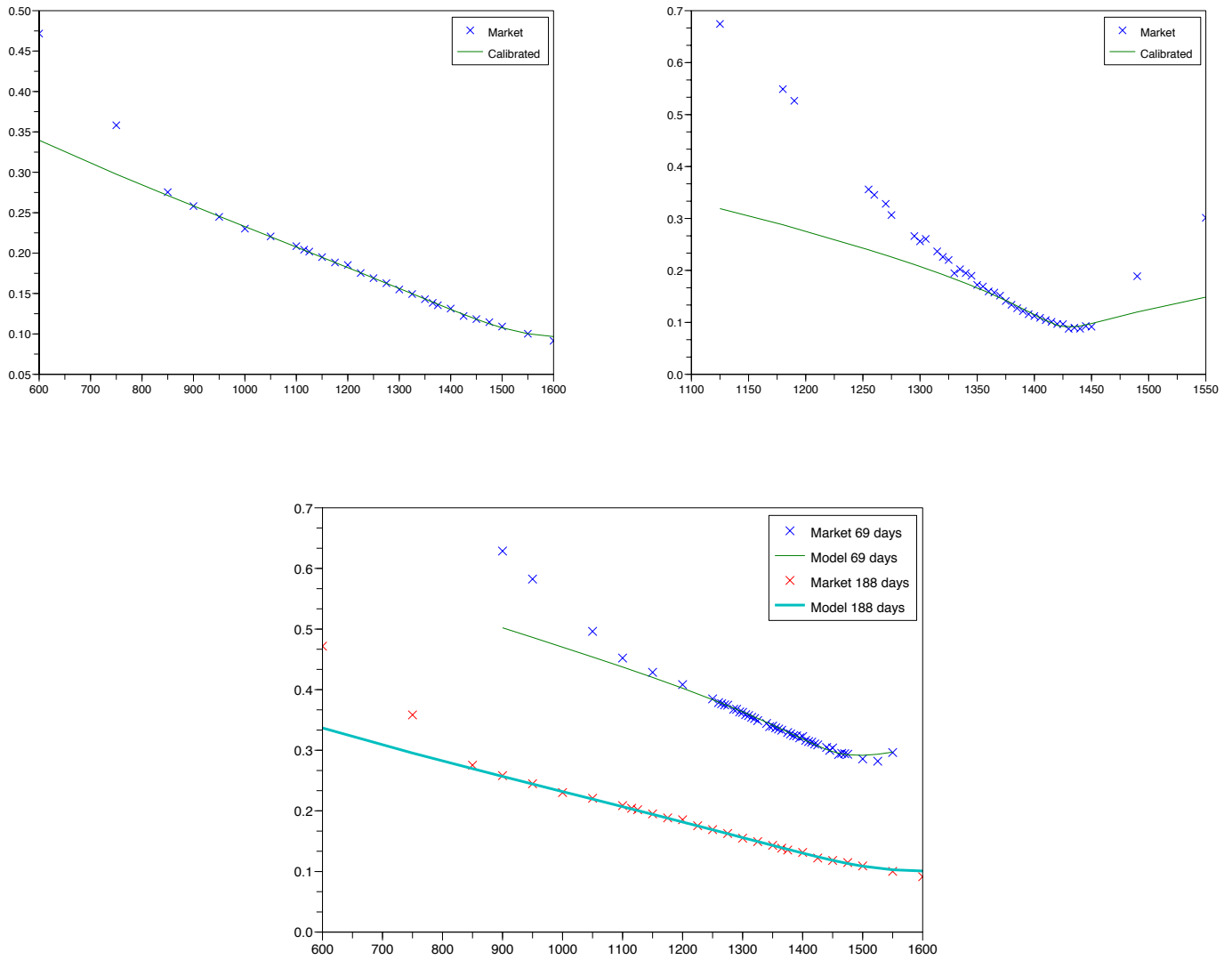


Figure 4.8: Calibration du modèle de Heston aux données de marché. En haut à gauche: Maturité 188 jours: le modèle reproduit correctement le skew du marché aux longues maturités. En haut à droite: Maturité 8 jours: le smile aux courtes maturités n'est pas calibré correctement. En bas: Calibration simultanée à 2 maturités: la structure par terme est modélisée correctement.

where  $\mu_T$  is the probability distribution of  $X_T$ . Condition (4.24) enables us to compute  $\zeta_T(v)$  by interchanging integrals:

$$\begin{aligned}\zeta_T(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(dx) e^{ivk} (e^x - e^k) (1_{k \leq x} - 1_{k \leq 0}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(dx) \int_x^0 e^{ivk} (e^k - e^x) dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(dx) \left\{ \frac{(1 - e^x)}{iv + 1} - \frac{e^x}{iv(iv + 1)} + \frac{e^{(iv+1)x}}{iv(iv + 1)} \right\}\end{aligned}$$

The first term in braces disappears due to the martingale condition and the other two, after computing the integrals, yield (4.25).  $\square$

**Numerical Fourier inversion.** Option prices can be computed by evaluating numerically the inverse Fourier transform of  $\tilde{\zeta}_T$ :

$$\tilde{z}_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \tilde{\zeta}_T(v) dv \quad (4.27)$$

This integral can be efficiently computed using the Fast Fourier transform, an algorithm due to Cooley and Tukey [10] which allows to compute  $F_0, \dots, F_{N-1}$ , given by,

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi ink/N}, \quad n = 0 \dots N-1,$$

using only  $O(N \ln N)$  operations.

To approximate option prices, we truncate and discretize the integral (4.27) as follows:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \tilde{\zeta}_T(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-A/2}^{A/2} e^{-ivk} \tilde{\zeta}_T(v) dv + \varepsilon_T = \frac{A}{2\pi N} \sum_{m=0}^{N-1} w_m \tilde{\zeta}_T(v_m) e^{-ikv_m} + \varepsilon_T + \varepsilon_D, \quad (4.28)$$

where  $\varepsilon_T$  is the truncation error,  $\varepsilon_D$  is the discretization error,  $v_m = -A/2 + m\Delta$ ,  $\Delta = A/(N-1)$  is the discretization step and  $w_m$  are weights, corresponding to the chosen integration rule (for instance, for the trapezoidal rule  $w_0 = w_{N-1} = 1/2$  and all other weights are equal to 1). Now, setting  $k_n = k_0 + \frac{2\pi n}{N\Delta}$  we see that the sum in the last term becomes a discrete Fourier transform:

$$\frac{A}{2\pi N} e^{ik_n A/2} \sum_{m=0}^{N-1} w_m e^{-ik_0 v_m} f(k_m) e^{-2\pi inm/N}$$

The FFT algorithm allows to compute  $\tilde{z}_T$  and therefore option prices for the log strikes  $k_n = k_0 + \frac{2\pi n}{N\Delta}$ . The log strikes are thus equidistant with the step  $d$  satisfying

$$d\Delta = \frac{2\pi}{N}.$$

Typically,  $k_0$  is chosen so that the grid is centered around the money,  $\Delta$  is fixed to keep the discretization error low, and  $N$  is adjusted to keep the truncation error low and have a sufficiently small step between strikes (increasing  $N$  reduces the truncation error and the distance between consecutive strikes at the same time). The option prices for the strikes not on the grid must be computed by interpolation. It should be noted that the FFT method should only be used when option prices for many strikes must be computed simultaneously (such as for calibration). If only a small number of strikes is needed, integration methods with variable step size usually have a better performance.

## 4.6 Complément: les diffusions affines

Pourquoi le modèle de Heston admet-il une formule explicite pour la fonction caractéristique du log-prix? Quels sont les autres modèles pour lesquels la fonction caractéristique peut être calculée, rendant possible la valorisation d'options par transformée de Fourier? La réponse à ces questions est fournie par la théorie de *processus affines* [16, 17] dont on donnera ici un aperçu très rapide.

Pour un processus de Markov  $X$  nous écrirons parfois  $X^{(t,x)}$  pour préciser explicitement l'instant de départ et la valeur initiale, ou  $X^x$  si  $t = 0$ . Un processus de Markov  $X$  homogène en temps est dit affine s'il existent des fonctions  $\psi(t, u) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $\phi(t, u) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , différentiables en  $t$ , tels que pour tout  $u \in \mathbb{R}^d$  et tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t^x}] = e^{\phi(t,u) + x^T \psi(t,u)}. \quad (4.29)$$

On demande alors par définition que la fonction caractéristique de  $X$  soit exponentiellement affine en l'état  $x$ , ce qui revient à dire qu'elle doit, par construction, être facile à calculer.

Supposons de plus que  $X$  est un processus de diffusion, de dynamique

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (4.30)$$

où  $W$  est un mouvement brownien  $n$ -dimensionnel,  $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow M^{d,n}$  tels que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t (\|\mu(X_s)\| + \|\sigma(X_s)\|^2) ds \right] < \infty$$

pour tout  $t$ . Alors par la formule d'Itô, pour tout  $u \in \mathbb{R}^d$  et  $t > 0$ ,

$$e^{iu^T X_t^x} = e^{iu^T x} + \int_0^t iu^T e^{iu^T X_s^x} \sigma(X_s^x) dW_s + \int_0^t \left\{ iu^T \mu(X_s^x) - \frac{1}{2} \text{Tr}(u^T u \sigma(X_s^x)^T \sigma(X_s^x)) \right\} e^{iu^T X_s^x} ds$$

En prenant l'espérance de chaque coté, et en divisant par  $t$ , on a, par convergence dominée,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \mathbb{E}[e^{iu^T X_t^x}] - e^{iu^T x} \right\} = iu^T \mu(x) - \frac{1}{2} \text{Tr}(u^T u \sigma(x)^T \sigma(x)).$$

D'un autre coté, la définition (4.29) et la homogénéité de  $X$  impliquent

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \mathbb{E}[e^{iu^T X_t^x}] - e^{iu^T x} \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, u) + x^T \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, u). \quad (4.31)$$

Puisque les deux égalités précédentes sont valables pour tout  $u \in \mathbb{R}^d$ , et la partie droite de (4.31) est affine en  $x$ , les coefficients  $\mu(x)$  et  $\sigma(x)^T \sigma(x)$  doivent eux aussi être affines en  $x$ :

$$\mu(x) = b + \sum_{i=1}^d \beta_i x_i \quad \text{et} \quad \sigma(x)^T \sigma(x) = a + \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i, \quad (4.32)$$

ou  $b$  et  $\beta_1, \dots, \beta_d$  sont des vecteurs de taille  $d$  et  $a$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  des matrices de taille  $d \times d$ .

Soit

$$Z_t = \mathbb{E}[e^{iuX_T} | \mathcal{F}_t] = e^{\phi(T-t,u) + X_t^T \psi(T-t,u)}.$$

Par la formule d'Itô,

$$dZ_t = Z_t \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + b^T \psi + \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi^T \psi a) \right\} dt + Z_t \sum_{i=1}^d \left( -\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \beta_i^T \psi + \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi^T \psi \alpha_i) \right) X_t^i dt + Z_t \psi^T \sigma(X_t) dW_t.$$

Puisque  $Z$  doit être une martingale et son drift est à nouveau affine en  $X_t$ , on conclut que les deux parties du drift s'annulent séparément: les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les équations différentielles ordinaires de type Riccati (qu'on a pu résoudre explicitement dans le cas du modèle de Heston en section 4.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= b^T \psi + \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi^T \psi a), & \phi(0, u) &= 0; \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} &= \beta_i^T \psi + \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi^T \psi \alpha_i), & i &= 1, \dots, d, & \psi(0, u) &= iu. \end{aligned}$$

En fonction de l'espace d'état du processus  $X$ , certains coefficients dans (4.32) vont s'annuler. Ces conditions d'annulation sont connues sous le nom de conditions de compatibilité. Nous donnerons des exemples de conditions de compatibilité pour  $d = 1$  et  $d = 2$ .

**Processus affine sur  $\mathbb{R}$**  Pour un processus affine unidimensionnel,  $b, \beta, a, \alpha \in \mathbb{R}$ . De plus, si l'espace d'état est  $\mathbb{R}$  tout entier, il faut imposer  $\alpha = 0$  pour que la volatilité reste positive. On conclut que  $X$  doit avoir la dynamique

$$dX_t = (b + \beta X_t)dt + \sigma dW_t, \quad \sigma = \sqrt{a} \geq 0,$$

c'est-à-dire que  $X$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (stationnaire si  $\beta < 0$ ).

**Processus affine sur  $\mathbb{R}_+$**  Pour que le processus reste positif, la volatilité doit s'annuler et le drift doit être positif lorsque  $X = 0$ , ce qui implique  $a = 0$  et  $b \geq 0$ . L'unique processus affine positif unidimensionnel est donc le processus CIR de dynamique

$$dX_t = (b + \beta X_t)dt + \sqrt{\alpha X_t}dW_t, \quad b \geq 0.$$

Autrement dit, la dynamique de volatilité utilisé dans le modèle de Heston est la seule qui permet d'avoir une fonction de caractéristique affine (si on se limite aux diffusions continues).

**Processus affine sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$**  Cet espace d'état correspond à un modèle à volatilité stochastique à un facteur  $(V, X)$ , où  $X$  a l'interprétation de logarithme du prix. Pour préserver la positivité de la première composante, le coefficient de diffusion de  $V$  doit s'annuler en  $V = 0$ . De plus, la matrice de volatilité ne peut pas dépendre de  $X$ . Finalement,

$$\sigma^T \sigma = \begin{pmatrix} \alpha_{11}V & \alpha_{12}V \\ \alpha_{12}V & \sigma_0^2 + \alpha_{22}V \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad \text{définie positive}$$

Autrement dit, la volatilité de  $X$  est  $\sqrt{\sigma_0^2 + \alpha_{22}V}$ , la volatilité de  $V$  est  $\sqrt{\alpha_{11}V}$  et la corrélation est stochastique et donnée par

$$\frac{\alpha_{12}\sqrt{V}}{\sqrt{\alpha_{11}(\sigma_0^2 + \alpha_{22}V)}}.$$

En ce qui concerne les coefficients de drift, celui de  $V$  ne doit pas dépendre de  $X$ , et celui de  $X$  est fixé, sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , par la condition que  $e^{X_t - rt}$  doit être une martingale. Finalement, on identifie le modèle affine continue risque-neutre à volatilité stochastique dans sa forme la plus générale:

$$\begin{aligned} dV_t &= (b + \beta V_t)dt + \sqrt{\alpha_{11}V_t}dW_t \\ dX_t &= \left( r - \frac{\sigma_0^2 + \alpha_{22}V_t}{2} \right) dt + \frac{\alpha_{12}\sqrt{V_t}}{\sqrt{\alpha_{11}}}dW_t + \sqrt{\sigma_0^2 + \alpha_{22}V_t - \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}V_t}}dW'_t, \end{aligned}$$

où  $W$  et  $W'$  sont deux mouvements browniens indépendants. On voit que ce modèle a seulement un paramètre de plus par rapport au modèle classique de Heston ( $\sigma_0$ ), ce qui montre que la classe de modèles affines continus à deux facteurs est assez restreint<sup>1</sup>. On aura beaucoup plus de liberté si on s'autorise à rajouter une composante de sauts. Par exemple, si  $X$  est un processus affine de fonction caractéristique (4.29),  $N$  est un processus de Poisson standard d'intensité  $\lambda$  indépendant de  $X$  et  $\{Y_i\}_{i \geq 1}$  une suite de variables i.i.d. sur  $\mathbb{R}^d$  de loi  $\mu(dz)$  indépendantes de  $X$  et  $N$ , alors le processus

$$X'_t = X_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

<sup>1</sup>L'introduction de ce paramètre additionnel est cependant suffisante pour empêcher la résolution explicite des équations de Riccati.

sera également affine, de fonction caractéristique

$$\mathbb{E}[e^{iuX'_t}] = \exp \left\{ \phi(t, u) + x^T \psi(t, u) + \lambda t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu^T z} - 1) \mu(dz) \right\},$$

et ce quelle que soit la loi de  $Y_i$ . Il est également possible d'introduire des processus de Lévy à intensité infinie et/ou des sauts dont l'intensité dépend de manière affine de l'état  $x$ .





## Chapitre 5

# Volatilité implicite dans les modèles à volatilité stochastique

Pour calibrer un modèle à volatilité stochastique, il est important de disposer d'informations qualitatives sur le comportement de la volatilité implicite, ainsi que de formules explicites approchées pour la volatilité implicite qui sont valables dans certains régions de paramètres (par exemple, lorsque le strike est grand, ou l'option est proche de maturité). Ces informations permettent de répertorier les formes du smile qui sont réalisables (et donc calibrables) dans un modèle donné, comprendre l'effet des paramètres du modèle sur le smile, et parfois choisir des valeurs de départ adaptées pour un algorithme numérique de calibration. Dans ce chapitre, nous donnerons un aperçu des différentes méthodes qui permettent de comprendre la forme du smile et d'obtenir des approximations pour la volatilité implicite, dans les modèles à volatilité stochastique. Nous utiliserons comme exemple le modèle de Heston, mais la plupart de méthodes sont valables dans d'autres contextes.

### 5.1 Un principe de symétrie pour la volatilité implicite

Plaçons nous dans le cadre du modèle de Black-Scholes à volatilité constante  $\sigma$  sous la probabilité martingale  $\mathbb{Q}$ :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t.$$

Puisque  $e^{-rt}S_t$  est une martingale, on peut introduire une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}^*$  par

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{S_t}{e^{rt}S_0} = e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

Alors,  $W_t^* = W_t + \sigma t$  est un  $\mathbb{Q}^*$ -mouvement Brownien, et comme  $\tilde{W} = -W^*$  est également un  $\mathbb{Q}^*$ -mouvement Brownien,  $e^{2rt} \frac{S_0^2}{S_t^2} = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$  a la même loi sous  $\mathbb{Q}^*$  que  $S_t$  sous  $\mathbb{Q}$ . On en déduit le principe de symétrie Call/Put pour le modèle de Black-Scholes:

$$\begin{aligned} C^{BS}(K, T, \sigma) &= e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] = e^{-rT} \frac{K}{S_0 e^{rT}} \mathbb{E} \left[ \frac{S_T}{e^{rT} S_0} \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K} - \frac{(e^{rT} S_0)^2}{S_T} \right)^+ \right] \\ &= e^{-rT} \frac{K}{S_0 e^{rT}} \mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K} - S_0 e^{\sigma \tilde{W}_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \right)^+ \right] = \frac{K}{S_0 e^{rT}} P^{BS} \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K}, T, \sigma \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $P^{BS}$  dénote le prix du put dans le modèle de Black-Scholes. Avec la notation  $k = \log \frac{K}{S_0} - rT$ , le principe de symétrie s'écrit encore:

$$\tilde{C}^{BS}(k, T, \sigma) = e^k \tilde{P}^{BS}(-k, T, \sigma).$$

Supposons maintenant que  $S$  suit un modèle à volatilité stochastique de dynamique

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sigma_t dW_t \\ d\sigma_t &= a_t dt + b_t dW'_t, \quad d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt\end{aligned}\tag{5.2}$$

On peut encore introduire une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}^*$  par

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{S_t}{e^{rt} S_0},$$

et il est clair que le processus  $S_t^* := \frac{S_t^2}{S_t}$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}^*$ . Cependant  $S^*$  sous  $\mathbb{Q}^*$  n'a pas nécessairement la même loi que  $S$  sous  $\mathbb{Q}$ . Il en découle que les prix de calls et de puts dans les modèles correspondant aux  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}^*$  (qui sont définis comme espérances sous les probabilités respectives) vérifient également un principe de symétrie

$$C(K, T) = \frac{K}{e^{rT} S_0} P^* \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K}, T \right) \iff \tilde{C}(k, T) = e^k \tilde{P}^*(-k, T).\tag{5.3}$$

La volatilité implicite est définie comme l'unique solution de l'équation

$$C(K, T) = C^{BS}(K, T, I(K, T)).$$

De (5.1) et (5.3) on déduit:

$$P^* \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K}, T \right) = P^{BS} \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K}, T, I(K, T) \right).$$

Mais la parité Call-Put permet de revenir aux Calls:

$$C^* \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K}, T \right) = C^{BS} \left( \frac{(e^{rT} S_0)^2}{K}, T, I(K, T) \right)$$

et donc  $I(K, T)$  est aussi la volatilité implicite de l'option de strike  $\frac{(e^{rT} S_0)^2}{K}$  dans le modèle transformé correspondant à la probabilité  $\mathbb{Q}^*$ , ou, autrement dit,  $\tilde{I}(k, T) = \tilde{I}^*(-k, T)$ .

Supposons maintenant que  $\rho = 0$  et les coefficients  $a$  et  $b$  sont indépendants de  $W$ . Il est clair que dans ce cas, la loi de  $\sigma$  ne change pas sous  $\mathbb{Q}^*$ , et donc  $S^*$  sous  $\mathbb{Q}^*$  a la même loi que  $S$  sous  $\mathbb{Q}$ . Ceci implique que  $P^* = P$ ,  $I^* = I$ , et donc  $\tilde{I}(k, T) = \tilde{I}^*(-k, T)$ : dans un modèle de volatilité stochastique sans corrélation, le smile est symétrique.

## 5.2 Cas de vol de vol faible: développement autour de Black-Scholes

**Modèle à volatilité stochastique sans corrélation** Dans un premier temps, plaçons-nous dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique, où la volatilité  $\sigma$  est indépendante du mouvement brownien  $W$  qui dirige le sous-jacent. On notera

$$V_T = \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

la variance intégrée. Grâce à l'indépendance, en insérant l'espérance conditionnelle par rapport à la trajectoire de la volatilité, on trouve que le prix d'un call européen vérifie

$$C(T, K) = E[C^{BS}(T, K, \sqrt{V_T/T})] = E[\bar{C}^{BS}(T, K, V_T)],$$

où on a posé  $\bar{C}^{BS}(T, K, V) := C^{BS}(T, K, \sqrt{V/T})$ ,  $\forall V > 0$ . Supposons maintenant que  $V_T$  est proche de  $E[V_T]$ , c'est-à-dire,  $\text{Var}V_T \ll E[V_T]^2$  (ce qui est le cas lorsque la volatilité de volatilité est faible). Par une décomposition en série de Taylor de la fonction  $\bar{C}^{BS}$ , autour du point  $E[V_T]$ , on trouve

$$C(T, K) \approx \bar{C}^{BS}(T, K, E[V_T]) + \frac{1}{2} \text{Var}V_T \frac{\partial^2}{\partial V^2} \bar{C}^{BS}(T, K, E[V_T]),\tag{5.4}$$

où

$$\frac{\partial^2}{\partial V^2} \overline{C}^{BS}(T, K, V) = \frac{Sn(d_1)}{4V^{3/2}} \left\{ \frac{k^2}{V} - \frac{V}{4} - 1 \right\}, \quad k = \log \frac{K}{Se^{rT}}.$$

Par ailleurs, lorsque  $\delta\sigma \ll \sigma$ ,

$$C^{BS}(T, K, \sigma + \delta\sigma) \approx C^{BS}(T, K, \sigma) + \delta\sigma \frac{\partial C^{BS}(T, K, \sigma)}{\partial \sigma}.$$

En comparant ces deux développements, on trouve que la volatilité implicite  $I(T, K)$  vérifie

$$\begin{aligned} I(T, K) &\approx \sqrt{E[V_T/T]} + \frac{1}{2} \text{Var} V_T \frac{\frac{\partial^2}{\partial V^2} \overline{C}^{BS}(T, K, E[V_T])}{\frac{\partial}{\partial \sigma} C^{BS}(T, K, \sqrt{E[V_T/T]})}, \\ &= \sqrt{E[V_T/T]} + \frac{1}{8T^{1/2} E[V_T]^{3/2}} \text{Var} V_T \left\{ \frac{k^2}{E[V_T]} - \frac{E[V_T]}{4} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

On trouve donc bien une forme du smile symétrique en log-moneyness  $k$ , comme cela a été démontré au paragraphe précédent.

Dans le modèle de Heston, posant  $v_t = \sigma_t^2$  et  $\bar{v}_t = \mathbb{E}[v_t] = \theta + e^{-\kappa t}(v_0 - \theta)$ , on a

$$\begin{aligned} v_T &= v_0 + \kappa \int_0^T (\theta - v_t) dt + \delta \int_0^T \sqrt{v_t} dW_t \\ \bar{v}_T &= v_0 + \kappa \int_0^T (\theta - \bar{v}_t) dt, \end{aligned}$$

d'où

$$v_T - \bar{v}_T = \kappa \int_0^T (\bar{v}_t - v_t) dt + \delta \int_0^T \sqrt{v_t} dW_t.$$

Puisque par ailleurs

$$v_T = \theta + e^{-\kappa T}(v_0 - \theta) + \delta \int_0^T e^{-\kappa(T-s)} \sqrt{v_s} dW_s \quad \Rightarrow \quad v_T - \bar{v}_T = \delta \int_0^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s,$$

on a finalement

$$\int_0^T (v_t - \bar{v}_t) dt = \delta \int_0^T \frac{1 - e^{-\kappa(T-s)}}{\kappa} \sqrt{v_s} dW_s$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Var} V_T &= \delta^2 \int_0^T \frac{(1 - e^{-\kappa(T-s)})^2}{\kappa^2} \mathbb{E}[v_s] ds = \delta^2 \int_0^T \frac{(1 - e^{-\kappa(T-s)})^2}{\kappa^2} (\theta + e^{-\kappa s}(v_0 - \theta)) ds \\ &= \frac{\theta \delta^2}{2\kappa^3} (2\kappa T - 4(1 - e^{-\kappa T}) + 1 - e^{-2\kappa T}) + \frac{\delta^2 (v_0 - \theta)}{\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa T} - 2\kappa T e^{-\kappa T}). \end{aligned}$$

**Modèles à volatilité stochastique avec une corrélation non nulle** Lorsque  $\rho \neq 0$ , la volatilité implicite approchée ne peut être obtenue par différentiation directe de la formule de Black-Scholes, mais le prix de l'option est typiquement différentiable en volatilité de volatilité  $\delta$  en  $\delta = 0$ , rendant possible un développement de type

$$C \approx C|_{\delta=0} + \delta \frac{\partial C}{\partial \delta} |_{\delta=0},$$

avec  $C|_{\delta=0}$  et  $\frac{\partial C}{\partial \delta}|_{\delta=0}$  qui peuvent souvent être calculés explicitement (reliés à la fonction de prix Black-Scholes). Nous donnerons un exemple de ce développement dans le modèle de Heston, où les calculs sont simplifiés par la représentation du prix via la transformée de Fourier. Dans les modèles où la fonction caractéristique n'admet pas de forme explicite le développement peut être effectué directement sur l'EDP de pricing. Cette approche peut être vue comme un cas particulier de la méthode de "développement autour d'un modèle proxy" (voir par exemple [2, 30] pour un traitement rigoureux).

Dans le modèle de Heston, le prix de l'option call en fonction de log-strike  $\tilde{C}(T, k, \delta)$  (nous avons explicitement fait apparaître la volatilité de volatilité), est donné par

$$\tilde{C}(T, k, \delta) = S_0(1 - e^k) + \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \frac{\Phi_\delta(T, u - i) - 1}{iu(1 + iu)} du,$$

où  $\Phi_\delta(T, v)$  est la fonction caractéristique du log prix, donnée par

$$\Phi_\delta(T, u) = \exp\{\theta C_\delta(T) + v_0 D_\delta(T)\},$$

avec les fonctions  $C$  et  $D$  définies dans (4.21)–(4.22). On montre facilement

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \downarrow 0} D_\delta(t) &= D_0(t) = -\frac{u^2 + iu}{\kappa(1 + \coth \frac{\kappa t}{2})} = -\frac{u^2 + iu}{2} \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} \\ \lim_{\delta \downarrow 0} C_\delta(t) &= \kappa \int_0^t D_0(s) ds = -\frac{u^2 + iu}{2} \left\{ t - \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} \right\} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\Phi_0(T, u) = \exp\left\{-\frac{u^2 + iu}{2} \left(\theta T + (v_0 - \theta) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{u^2 + iu}{2} \mathbb{E}[V_T]\right\}$$

et

$$\tilde{C}(T, k, \delta)|_{\delta=0} = \tilde{C}^{BS}(T, k, \sqrt{\mathbb{E}[V_T]/T}).$$

La dérivée de  $\tilde{C}(T, k, \delta)$  vérifie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}(T, k, \delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} &= \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \frac{\partial \Phi_\delta(T, u-i)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} du \\ &= \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \frac{\Phi_0(T, u-i)}{iu(1+iu)} du \left\{ \theta \frac{\partial C_\delta(T)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} + v_0 \frac{\partial D_\delta(T)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \right\}. \end{aligned}$$

Les dérivées de  $C_\delta$  et  $D_\delta$  peuvent être calculées soit directement, soit par différentiation des équations de Riccati. Soit  $\dot{D} := \frac{\partial D_\delta}{\partial \delta}$  et  $\dot{C} := \frac{\partial C_\delta}{\partial \delta}$ . Alors, en dérivant les équations, avec la substitution  $\delta = 0$ , on a:

$$\dot{D}'_0 = -\kappa \dot{D}_0 + iu\rho D_0 \quad \text{et} \quad \dot{C}'_0(t) = \kappa \dot{D}_0,$$

et la solution est

$$\begin{aligned} \dot{D}_0(t) &= iu\rho \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} D_0(s) ds = -\frac{iu\rho(u^2 + iu)}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa t} - \kappa t e^{-\kappa t}) \\ \dot{C}_0(t) &= \kappa \int_0^t \dot{D}_0(s) ds = -\frac{iu\rho(u^2 + iu)}{2\kappa^2} (\kappa T(1 + e^{-\kappa T}) - 2(1 - e^{-\kappa T})). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial C_\delta(T)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} + v_0 \frac{\partial D_\delta(T)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} &= -\frac{iu\rho(u^2 + iu)}{2\kappa^2} \left\{ (v_0 - \theta)(1 - e^{-\kappa T} - \kappa T e^{-\kappa T}) + \theta(e^{-\kappa T} + \kappa T - 1) \right\} \\ &:= -\frac{iu\rho(u^2 + iu)}{2} g(T). \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}(T, k, \delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} &= -\frac{\rho g(T)}{2} \frac{S_0 e^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} (-iu) \Phi_0(T, u) du \\ &= -\frac{\rho g(T) S_0 e^k}{2} \frac{d}{dk} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \exp\left\{-\frac{u^2 + iu}{2} \mathbb{E}[V_T]\right\} du \\ &= -\frac{\rho g(T) S_0 e^k}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}} \frac{d}{dk} n \left( \frac{k}{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}} + \frac{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}}{2} \right) \\ &= \frac{\rho g(T) S_0}{2\mathbb{E}[V_T]} \left( \frac{k}{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}} + \frac{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}}{2} \right) n \left( \frac{k}{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}} - \frac{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}}{2} \right) \end{aligned}$$

En utilisant le développement de premier ordre en volatilité du prix Black-Scholes, on en déduit une approximation de la volatilité implicite dans le modèle de Heston, à l'ordre 1 en  $\delta$ :

$$\tilde{I}(T, k) \approx \sqrt{\frac{\mathbb{E}[V_T]}{T}} + \frac{\delta \frac{\partial \tilde{C}(T, k, \delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}}{\frac{\partial \tilde{C}^{BS}(T, k, \sqrt{\frac{\mathbb{E}[V_T]}{T}})}{\partial \sigma}} = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[V_T]}{T}} + \frac{\rho \delta g(T)}{2\mathbb{E}[V_T]\sqrt{T}} \left( \frac{k}{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}} + \frac{\sqrt{\mathbb{E}[V_T]}}{2} \right). \quad (5.6)$$

La pente de la volatilité implicite dans le modèle de Heston serait donc proportionnelle à  $\rho\delta$  et inversement proportionnelle à la volatilité. En poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 en  $\delta$ , il est possible d'établir des résultats explicites sur la convexité de la volatilité implicite.

### 5.3 Comportement aux strikes extrêmes via l'explosion des moments: la formule de Roger Lee

Dans la section 3.6, nous avons vu que dans tout modèle sans arbitrage, la volatilité implicite vérifie, en tant que fonction du log-strike  $k$ ,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{I}^2(k)T}{k} \leq 2.$$

Plus généralement, il est possible d'établir un lien entre la valeur de  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k}$  et le nombre des moments finis du processus de prix  $S_T$ . Ce résultat n'est pas limité aux seuls modèles de volatilité stochastique, il est complètement indépendant de modèle, et s'applique dès que le processus de prix admet des moments. Dans le reste de la section on omettra le tilde sur les prix d'options et la volatilité implicite, même si ces quantités sont considérées comme fonctions de log-strike  $k$ .

**Théorème 2** (Roger Lee ([43], voir également [23])).

(i) Soit

$$\tilde{p} = \sup\{p : E[S_T^{1+p}] < \infty\} \quad \text{et} \quad \beta_R = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k}.$$

Alors  $\beta_R \in [0, 2]$  et

$$\tilde{p} = \frac{1}{2\beta_R} + \frac{\beta_R}{8} - \frac{1}{2}.$$

(ii) Soit

$$\tilde{q} = \sup\{q : E[S_T^{-q}] < \infty\} \quad \text{et} \quad \beta_L = \limsup_{k \rightarrow -\infty} \frac{I^2(k)T}{|k|}.$$

Alors  $\beta_L \in [0, 2]$  et

$$\tilde{q} = \frac{1}{2\beta_L} + \frac{\beta_L}{8} - \frac{1}{2}.$$

*Preuve.* Dans la preuve on supposera sans perte de généralité que le taux d'intérêt est égal à zéro.

*Etape 1.* Commençons par le cas de strikes positifs (limite  $k \rightarrow +\infty$ ). Supposons que  $E[S_T^{p+1}] < \infty$  pour  $p > 0$ . Soit  $F(x) = x - K$  et

$$G(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \left( \frac{p}{p+1} \right)^p \frac{1}{K^p}.$$

On vérifie facilement que  $F\left(\frac{K(p+1)}{p}\right) = G\left(\frac{K(p+1)}{p}\right) = \frac{K}{p}$  et  $F'\left(\frac{K(p+1)}{p}\right) = G'\left(\frac{K(p+1)}{p}\right) = 1$ . Puisque  $F$  est linéaire et  $G$  est convexe, ceci montre que  $F(x) \leq G(x)$  pour tout  $x$ . En prenant la partie positive et l'espérance des deux cotés de l'inégalité, on a  $E^Q[(S_T - K)^+] \leq \frac{C}{K^p}$  avec  $C = \frac{E^Q[S_T^{p+1}]}{p+1} \left(\frac{p}{p+1}\right)^p$ , d'où on déduit que

$$C(k) = O(e^{-pk}), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (5.7)$$

Posons maintenant  $f(\beta) := \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{4} - 1$ . En utilisant l'équivalent

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{N(-x)}{|x|^{-1}n(x)} = 1,$$

on voit que dans la formule de Black-Scholes,

$$C^{BS}(k, \sqrt{\beta k/T}) = S_0 N\left(\frac{-1 + \beta/2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{k}\right) - S_0 e^k N\left(\frac{-1 - \beta/2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{k}\right),$$

le premier terme est équivalent à  $\frac{S_0 \sqrt{\beta} n\left(\frac{1-\beta/2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{k}\right)}{(1-\beta/2)\sqrt{k}}$  et le deuxième à  $\frac{S_0 e^k \sqrt{\beta} n\left(\frac{1+\beta/2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{k}\right)}{(1+\beta/2)\sqrt{k}} = \frac{S_0 \sqrt{\beta} n\left(\frac{1-\beta/2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{k}\right)}{(1+\beta/2)\sqrt{k}}$ , ce qui donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} C^{BS}(k, \sqrt{\beta k/T}) \sqrt{k} e^{f(\beta)k/2} = \frac{S_0 \beta^{3/2}}{(1 - \beta^2/4)\sqrt{2\pi}} := C$$

et donc pour tout  $\beta \in (0, 2)$ ,

$$C^{BS}(k, \sqrt{\beta k/T}) \sim C \frac{e^{-f(\beta)k/2}}{\sqrt{k}} \quad (5.8)$$

lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , où  $C$  est une constante.

Soit  $\beta$  tel que  $p > f(\beta)$ . On déduit de (5.7) et (5.8) qu'il existe un  $k^*$  tel que pour tout  $k > k^*$ ,

$$C(k) = C^{BS}(k, I(k)) < C^{BS}(k, \sqrt{\beta k/T}),$$

et donc  $I(k) < \sqrt{\beta k/T}$  d'où

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k} \leq \beta,$$

*Etape 2.* Par intégration directe, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} p(p+1) \int_0^\infty K^{p-1}(x-K)^+ dK &= p(p+1) \int_0^x K^{p-1}(x-K) dK \\ &= (p+1)x^{p+1} - px^{p+1} = x^{p+1}. \end{aligned}$$

En substituant  $x = S_T$  et en prenant l'espérance des deux cotés, on obtient que

$$ES_T^{p+1} = p(p+1)E \int_0^\infty K^{p-1}(S_T - K)^+ dK. \quad (5.9)$$

Soit  $\beta \in (0, 2]$  tel que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k} < \beta.$$

Il existent alors  $k^* < \infty$  et  $\beta^* < \beta \leq 2$  tels que pour tout  $k > k^*$ ,

$$C(k) = C^{BS}(k, I(k)) < C^{BS}(k, \sqrt{\beta^* k/T}) = o(e^{-f(\beta^*)k/2}) = o(e^{-f(\beta)k/2}),$$

parce que  $f$  décroît sur  $[0, 2]$ . En utilisant (5.9) on a alors

$$\begin{aligned} E[S_T^{\frac{f(\beta)}{2}+1}] &= S_0^{\frac{f(\beta)}{2}} p(p+1) \int_0^\infty e^{\frac{kf(\beta)}{2}} c(k) dk \\ &\leq S_0^{\frac{f(\beta)}{2}} p(p+1) \int_0^{k^*} e^{\frac{kf(\beta)}{2}} c(k) dk + C \int_{k^*}^\infty e^{\frac{kf(\beta)}{2} - \frac{kf(\beta^*)}{2}} dk < \infty. \end{aligned}$$

Autrement dit,  $S_T$  admet un moment d'ordre  $\frac{f(\beta)}{2} + 1$ .

*Etape 3.* Finalement, soit  $\beta$  la solution de l'équation  $\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{4} - 1 = 2\tilde{p}$  appartenant à l'intervalle  $[0, 2]$  et  $\tilde{p} = \sup\{p : E[S_T^{p+1}] < \infty\}$ . Supposons que  $\beta > 0$  et

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k} < \beta,$$

alors *Etape 2* implique qu'il existe  $\beta^* < \beta$  tel que  $S_T$  admet le moment d'ordre  $\frac{f(\beta^*)}{2} + 1 > \frac{f(\beta)}{2} + 1 = \tilde{p} + 1$ , ce qui contredit  $\tilde{p} = \sup\{p : E[S_T^{p+1}] < \infty\}$ . Supposons alors que  $\beta < 2$  et

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k} > \beta,$$

En prenant  $\beta^*$  avec  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k} > \beta^* > \beta$ , on trouve que  $\frac{f(\beta^*)}{2} < \tilde{p}$ , et donc  $S_T$  admet un moment d'ordre  $\frac{f(\beta^*)}{2} + 1$ , ce qui donne une contradiction avec *Etape 1*. On conclut que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{I^2(k)T}{k} = \beta, \quad (5.10)$$

*Etape 4.* La limite  $k \rightarrow -\infty$  s'obtient à partir du résultat pour les strikes positifs par changement de probabilité. En effet, soit  $\mathbb{Q}^*$  la mesure de probabilité définie par  $\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_T}{S_0}$ . Alors  $\frac{S_0^2}{S_t^2}$  est une  $\mathbb{Q}^*$ -martingale de valeur initiale  $S_0$ , et comme dans la démonstration du principe de symétrie de smile, on déduit que  $I^*(T, -k) = I(T, k)$ , où  $I^*$  est la volatilité implicite d'une option sur  $\frac{S_0^2}{S_T}$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}^*$ . Alors, par le résultat de l'étape 3,

$$\limsup_{k \rightarrow -\infty} \frac{I^2(T, k)T}{|k|} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{(I^*)^2(T, k)T}{k} = \tilde{\beta}^*,$$

où  $\tilde{\beta}^*$  est la solution de  $\tilde{p}^* = \frac{f(\tilde{\beta}^*)}{2}$  et

$$\tilde{p}^* = \sup\{p : \mathbb{E}^*[(S_T^*)^{p+1}] < \infty\} = \sup\left\{p : \mathbb{E}\left[\frac{S_T}{S_0} \left(\frac{S_0^2}{S_T}\right)^{p+1}\right] < \infty\right\} = \inf\{p : \mathbb{E}[S_T^{-p}] < \infty\}.$$

□

Le résultat de Roger Lee montre que le carré de la volatilité, en fonction du log-strike, est asymptotiquement linéaire. Ce type de comportement est illustré sur le graphique 5.1.

Dans le modèle de Heston, les indices de l'explosion  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  dépendent du temps  $T$ . Ils ne peuvent pas être calculés explicitement, mais on peut identifier, pour chaque  $u$ , le premier instant  $T^*(u)$  de l'explosion de  $E[S_T^u]$  — la formule a été donnée dans Section 4.4. On en déduit par exemple que  $\lim_{u \rightarrow \infty} T^*(u) = 0$ , ce qui implique que le comportement de  $I^2(T, k)$  dans le modèle de Heston est toujours asymptotiquement linéaire en  $k$ , quel que soit  $T$ .

Dans certains modèles les indices de l'explosion peuvent être reliés de manière très explicite aux paramètres du modèle. Par exemple, dans le modèle de Kou, le log-prix  $X_t$  est donné par

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,  $(Y_i)$  sont des variables i.i.d. de densité  $\mu(x)$  avec

$$\mu(x) = p\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} \mathbf{1}_{x>0} + (1-p)\lambda_- e^{-\lambda_- |x|} \mathbf{1}_{x<0},$$

et  $\gamma$  est choisi pour que  $e^{X_t}$  soit une martingale (sous la probabilité risque-neutre).

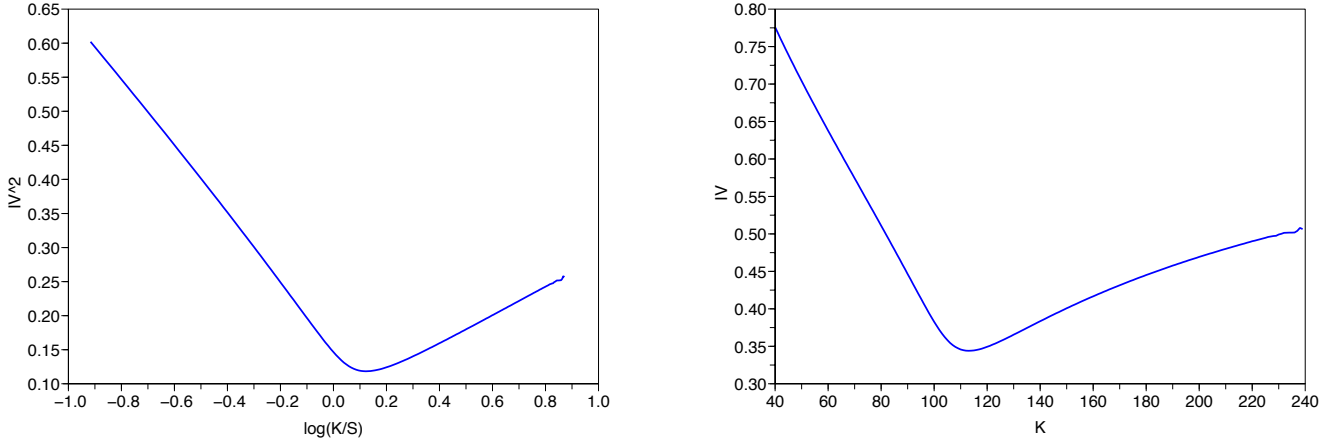


Figure 5.1: Comportement asymptotique du smile dans le modèle de Heston pour les valeurs extrêmes du strike. Les paramètres sont:  $\rho = -0.5$ ,  $v_0 = \theta = 0.04$ ,  $\delta = 0.5$  et  $k = 2$ , temps jusqu'à maturité:  $T = 50$  jours.

On montre facilement que la fonction caractéristique de  $X_t$  vérifie

$$\phi_t(u) = \mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp\left(iu\gamma t - \frac{\sigma^2 u^2}{2}t + \lambda t (\mathbb{E}[e^{iuY_1}] - 1)\right),$$

où

$$\mathbb{E}[e^{iuY_1}] = \frac{p\lambda_+}{\lambda_+ - iu} + \frac{(1-p)\lambda_-}{\lambda_- + iu}.$$

La fonction caractéristique  $\phi_T(u)$  est donc analytique pour  $-\lambda_+ < \Im u < \lambda_-$ , ce qui montre que les indices d'explosion sont indépendantes de temps et donnés par  $\tilde{p} = \lambda_+ - 1$  et  $\tilde{q} = \lambda_-$ .

## 5.4 Volatilité implicite en temps petit / en temps grand par les grandes déviations

L'exercice d'une option hors de la monnaie dans un modèle de diffusion pour  $T \rightarrow 0$  ou  $T \rightarrow \infty$  est un *événement rare*:

$$\lim_{T \downarrow 0} \mathbb{P}[S_T \geq K] = 0 \quad \forall K > S_0 \quad \text{et} \quad \lim_{T \uparrow +\infty} \mathbb{P}[S_T \geq K] = 0 \quad \forall K > 0$$

car  $S_T \rightarrow S_0$  p.s. lorsque  $T \downarrow 0$  toujours et  $S_T \rightarrow 0$  p.s. lorsque  $T \uparrow +\infty$  dans la plupart de modèles (par exemple, Black-Scholes). Par conséquent, les asymptotiques du prix pour  $T \rightarrow 0$  et  $T \rightarrow +\infty$  peuvent être déterminées par les résultats de la théorie de grandes déviations. L'un des résultats de base de cette théorie est le théorème de Cramer.

**Théorème 3.** Soit  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  une suite de v.a. i.i.d. avec  $E[X_1] = 0$ . Alors, pour tout  $x > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq x\right] = -I(x),$$

où

$$I(x) = \sup_{\theta} (\theta x - l(\theta)) \quad \text{et} \quad l(\theta) = \log \mathbb{E}[e^{\theta X_1}].$$



Lorsque  $\{X_i\}$  sont des variables gaussiennes centrées réduites,  $l(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$  et  $I(x) = \frac{x^2}{2}$ . On en déduit:

$$\lim_{T \uparrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}[\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \geq k]}{T} = -\frac{\sigma^2}{8}, \quad \forall m \in \mathbb{R},$$

et par l'inversement du temps du mouvement brownien,

$$\lim_{T \downarrow 0} T \log \mathbb{P}[\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \geq k] = -\frac{k^2}{2\sigma^2}.$$

Pour en déduire le comportement du prix du call dans le modèle Black-Scholes en  $T \downarrow 0$ , on observe d'un coté que pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+] \geq \delta \mathbb{P}[X_T \geq k + \delta],$$

et donc par continuité,

$$\lim_{T \downarrow 0} T \log C^{BS}(T, m) \geq -\frac{k^2}{2\sigma^2}.$$

D'un autre coté, pour tout  $q > 1$ , et  $p$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

$$\mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+] \leq \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+]^{\frac{1}{p}} \mathbb{P}[X_T \geq k]^{\frac{1}{q}},$$

d'où on déduit:

$$\lim_{T \downarrow 0} T \log C^{BS}(T, k) \leq -\frac{1}{q} \frac{k^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{p} \lim_{T \downarrow 0} T \log \mathbb{E}[e^{pX_T}].$$

Puisque la dernière limite est égale à 0, et  $q > 1$  est arbitraire, on a finalement

$$\lim_{T \downarrow 0} T \log C^{BS}(T, k) = -\frac{k^2}{2\sigma^2}. \quad (5.11)$$

Pour caractériser le comportement limite du prix dans le modèle de Heston (ou un autre modèle affine) il est nécessaire de faire appel à un résultat plus fort que le théorème de Cramer, qui ne nécessite pas l'hypothèse d'indépendance.

**Définition 3.** Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires. On dit que  $(Z_n)_{n \geq 1}$  vérifie le principe de grandes déviations avec la fonction de taux  $I$ , si pour tout  $\Gamma$  mesurable,

$$-\inf_{x \in \Gamma^0} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[Z_n \in \Gamma] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[Z_n \in \Gamma] \leq -\inf_{x \in \bar{\Gamma}} I(x),$$

où  $\Gamma^0$  est le plus grand sousensemble ouvert de  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  est le plus petit ensemble fermé qui contient  $\Gamma$ . Si  $I$  est continue sur  $\bar{\Gamma}$  alors on a simplement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[Z_n \in \Gamma] = -\inf_{x \in \bar{\Gamma}} I(x).$$

**Théorème 4** (Gärtner-Ellis). Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires, et supposons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  il existe

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[e^{n\lambda Z_n}] \in (-\infty, \infty],$$

telle que  $0 \in \text{int } D := \{\lambda : \Lambda(\lambda) < \infty\}$ , différentiable sur  $\text{int } D$  et vérifiant

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial D} |\Lambda'(\lambda_n)| = +\infty$$

pour toute suite  $(\lambda_n) \subset \text{int } D$  telle que  $\lim \lambda_n \in \partial D$ .

Alors  $(Z_n)$  vérifie le principe de grandes déviations avec fonction de taux

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda} (\lambda x - \Lambda(\lambda)).$$

### 5.4.1 Volatilité implicite en temps petit dans le modèle de Heston [21]

On pose  $Z_n = X_{\frac{1}{n}}$  où  $X$  est le log prix dans le modèle de Heston. Il faut alors calculer

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{t \downarrow 0} t \log \mathbb{E}[e^{\frac{\lambda}{t} X_t}] = v_0 \lim_{t \downarrow 0} t D(t)|_{u=\frac{\lambda}{t}},$$

puisque  $C(t) = O(tD(t))$  quand  $t \rightarrow 0$ . Un calcul attentif (puisqu'il faut tenir compte du domaine de définition de  $\Lambda$ ) donne

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\lambda v_0}{\delta(\sqrt{1-\rho^2} \cot\left(\frac{1}{2}\delta\lambda\sqrt{1-\rho^2}\right) - \rho)}, \quad \lambda \in (p_-, p_+)$$

et  $+\infty$  sinon, où  $p_-$  et  $p_+$  correspondent à l'intervalle où le dénominateur ne s'annule pas. On vérifie facilement que la fonction  $\Lambda$  satisfait les hypothèses du théorème de Gärtner-Ellis. De plus, puisque  $\Lambda$  est convexe et  $\Lambda'(0) = 0$ , la fonction  $\Lambda^*(x)$  est finie, positive, croissante pour  $x > 0$  et décroissante pour  $x < 0$ . Le principe de grandes déviations donne alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} t \log \mathbb{P}[X_t > k] &= -\Lambda^*(k), \quad k > 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} t \log \mathbb{P}[X_t < k] &= -\Lambda^*(k), \quad k < 0. \end{aligned}$$

Comme on a fait pour le modèle de Black-Scholes au début de cette section, on en déduit une asymptotique pour le prix d'une option call:

$$\lim_{t \downarrow 0} t \log \mathbb{E}[(e^{X_t} - e^k)^+] = -\Lambda^*(k), \quad k > 0,$$

et en comparant ce résultat avec l'asymptotique Black-Scholes, on trouve que la volatilité implicite en temps petit vérifie

$$\lim_{T \downarrow 0} \tilde{I}(T, k) = \frac{k}{\sqrt{2\Lambda^*(k)}}. \quad (5.12)$$

Ce résultat permet de donner un développement explicite pour la volatilité implicite en temps petit près de la monnaie. Pour cela il est nécessaire de donner le développement en série de Taylor de  $\Lambda^*$  en 0 jusqu'à l'ordre 4. Puisque la fonction  $\Lambda^*$  est convexe avec un minimum en 0,  $\Lambda^*(0) = (\Lambda^*)'(0) = 0$ . De plus,

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} = x\lambda^*(x) - \Lambda(\lambda^*(x)) \quad \text{avec} \quad \lambda^*(x) = (\Lambda')^{-1}(x) := p(x),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} (\Lambda^*)'(0) &= p(0) = 0 \\ (\Lambda^*)''(0) &= p'(0) = \frac{1}{\Lambda''(p(0))} = \frac{1}{\Lambda''(0)} \\ (\Lambda^*)^{(3)}(0) &= -\frac{\Lambda^{(3)}(p(0))}{(\Lambda''(p(0)))^3} = -\frac{\Lambda^{(3)}(0)}{(\Lambda''(0))^3} \\ (\Lambda^*)^{(4)}(0) &= \frac{3(\Lambda^{(3)}(p(0)))^2 - \Lambda''(p(0))\Lambda^{(4)}(p(0))}{(\Lambda''(p(0)))^5} = \frac{3(\Lambda^{(3)}(0))^2 - \Lambda''(0)\Lambda^{(4)}(0)}{(\Lambda''(0))^5} \end{aligned}$$

D'un autre coté, puisque  $\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + O(x^3)$ , la fonction  $\Lambda$  vérifie

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\lambda^2 v_0}{2 - \rho\lambda\delta - \frac{\lambda^2 \delta^2 (1-\rho^2)}{6}} + O(\lambda^6) = \frac{\lambda^2 v_0}{2} + \frac{\lambda^3 v_0 \rho \delta}{4} + \frac{\lambda^4 v_0 \delta^2 (1+2\rho^2)}{24} + O(\lambda^5),$$

d'où on déduit facilement que

$$\begin{aligned} \Lambda''(0) &= v_0, \quad \Lambda^{(3)}(0) = \frac{3}{2} v_0 \rho \delta, \quad \Lambda^{(4)}(0) = v_0 \delta^2 (1+2\rho^2); \\ (\Lambda^*)''(0) &= \frac{1}{v_0}, \quad (\Lambda^*)^{(3)}(0) = -\frac{3\rho\delta}{2v_0^2}, \quad (\Lambda^*)^{(4)}(0) = \frac{\delta^2}{v_0^3} \left( \frac{19}{4} \rho^2 - 1 \right), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\Lambda^*(x) = \frac{1}{2v_0}x^2 - \frac{\rho\delta}{4v_0^2}x^3 + \frac{\delta^2}{v_0^3}\left(\frac{19}{96}\rho^2 - \frac{1}{24}\right)x^4 + O(x^5),$$

et avec la substitution dans (5.12),

$$\lim_{T \downarrow 0} \tilde{I}(T, k) = \frac{\sqrt{v_0}}{\sqrt{1 - \frac{\rho\delta}{2v_0}k + \frac{\delta^2}{v_0^2}\left(\frac{19}{48}\rho^2 - \frac{1}{12}\right)k^2}} + O(k^3) = \sqrt{v_0} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{\rho\delta k}{v_0} + \left(\frac{1}{24} - \frac{5}{48}\rho^2\right) \frac{\delta^2 k^2}{v_0^2} \right\} + O(k^3).$$

Ce résultat peut être utilisé pour obtenir une estimation explicite de  $v_0$ ,  $\rho$  et  $\delta$  à partir du niveau, pente et convexité du smile en temps petit.

### 5.4.2 Volatilité implicite en temps grand dans le modèle de Heston [22]

En vue d'appliquer le théorème de Gärtner-Ellis, on pose  $Z_n = \frac{X_n}{n}$  et étudie

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \mathbb{E}[e^{\lambda X_t}]$$

Cette fois, le seul terme qui contribue à la limite est le premier terme de  $C(t)$  (il croît linéairement avec  $t$  alors que les autres termes restent bornés), et on a

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\theta\kappa(\kappa - \rho\delta\lambda - \gamma)}{\delta^2}, \quad \lambda \in (p_-, p_+)$$

et  $+\infty$  sinon, où  $\gamma = \sqrt{\delta^2(\lambda - \lambda^2) + (\kappa - \rho\delta\lambda)^2}$ , et  $p_-, p_+$  correspondent à l'intervalle sur lequel l'expression sous la racine reste positive. Cette fonction vérifie encore les hypothèses du théorème de Gärtner-Ellis. De plus,  $\Lambda(0) = \Lambda(1) = 0$ , et donc  $\Lambda^*$  est croissant sur  $(0, \infty)$  et même sur  $(-\varepsilon, \infty)$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. On en déduit:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}[e^{X_T} \geq e^k] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}\left[\frac{X_T}{T} \geq \frac{k}{T}\right] = -\Lambda^*(0) = \inf_{\lambda} \Lambda(\lambda) = \frac{\kappa\theta(\eta + \rho\delta - 2\kappa)}{2\delta^2(1 - \rho^2)},$$

où  $\eta = \sqrt{\delta^2 + 4\kappa^2 - 4\rho\delta\kappa}$ , et ce quel que soit  $k \in \mathbb{R}$ . Remarquons également que le inf ci-dessus peut être pris sur  $\lambda \in (0, 1)$ .

Lorsque  $T \rightarrow +\infty$ , le prix du call ne converge pas vers 0, et nous allons plutôt étudier la limite de  $1 - \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+]$ . Pour la borne inférieure, on a

$$1 - \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+] = e^k \mathbb{E}[e^{X_T - k} \wedge 1] \geq e^k \mathbb{P}[X_t \geq k]$$

et donc

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \log(1 - \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+]) \geq -\Lambda^*(0).$$

La borne supérieure, découle de l'inégalité

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \log(1 - \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+]) \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \log(e^k \mathbb{E}[e^{\lambda(X_T - k)}]) = \Lambda(\lambda)$$

valable pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ . En minimisant sur  $\lambda$ , on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \log(1 - \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+]) \leq \min_{\lambda \in [0, 1]} \Lambda(\lambda) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \Lambda(\lambda) = -\Lambda^*(0),$$

d'où finalement

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \log(1 - \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+]) = -\Lambda^*(0).$$

Cette limite est également valable dans le modèle de Black-Scholes, dans lequel  $\Lambda(\lambda) = \frac{\sigma^2(\lambda^2 - \lambda)}{2}$  et  $\Lambda^*(0) = \frac{\sigma^2}{8}$ . En comparant les deux asymptotiques, on trouve, pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \tilde{I}^2(T, k) = I_\infty^2 = - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{8}{T} \log(1 - \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+]) = 8\Lambda^*(0) = \frac{4\kappa\theta(\eta + \rho\delta - 2\kappa)}{\delta^2(1 - \rho^2)}.$$

Loin de l'échéance, le smile de volatilité s'applatit (pour une plage fixe de strikes), et converge vers une valeur limite, qui n'est pas égale à  $\theta$ , mais tient compte des fluctuations du processus de volatilité autour de sa valeur moyenne entre 0 et  $T$ . Lorsque  $\delta$  est petit, la volatilité implicite à long terme vérifie

$$I_\infty^2 = \theta \left( 1 + \frac{\delta \rho}{2\kappa} + O(\delta^2) \right),$$

en accord avec le comportement limite en  $T \rightarrow +\infty$  de la formule (5.6).

# Chapitre 6

## Produits dérivés de volatilité

### 6.1 Swaps de variance

Les swaps de variance sont des actifs contingents qui permettent de prendre des positions sur la volatilité (variance) de sous-jacent. Un swap de variance a un pay-off à l'échéance égal à

$$H_T = \frac{NA}{n} \sum_{i=1}^n \left( \log \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 - N\sigma_K^2,$$

où

- $A = 250$  est le nombre moyen de jours ouvrés dans l'année;
- $N$  est le nominal du contrat;
- $n$  représente le nombre de jours ouvrés jusqu'à l'échéance  $T$ ;
- $\sigma_K$  est la volatilité 'strike'.

En d'autres mots, un swap de variance permet d'échanger un montant fixe  $N\sigma_K^2$  contre un flux aléatoire égal à la variance réalisée du sous-jacent.

Dans un modèle à trajectoires continues, un swap de variance peut être répliqué par un portefeuille statique contenant des options européennes et un portefeuille dynamique contenant le sous-jacent [7]. Pour simplifier le traitement, on va approcher la somme dans le pay-off de produit par une intégrale:

$$H_T = N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds - \sigma_K^2 \right\}.$$

Supposons que le sous-jacent  $S$  est décrit par

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

où  $\mu_t$  et  $\sigma_t$  sont deux processus stochastiques. La formule d'Itô donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0}. \quad (6.1)$$

Pour répliquer la variance intégrée, il suffit alors de répliquer les deux termes dans la partie droite.

Soit  $V_t$  la valeur du portefeuille qui réplique  $\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}$  et soit  $Q$  une probabilité risque-neutre. On a alors

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} E \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left\{ \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + r(T-t) \right\} \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$dV_t = r(V_t - \delta_t S_t)dt + \delta_t dS_t \quad \text{avec} \quad \delta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}.$$

Le premier terme de la partie droite de (6.1) peut donc être répliqué par un portefeuille autofinçant consistant à investir  $e^{-r(T-t)}$  en actions et ayant la valeur initiale  $V_0 = rT e^{-rT}$ .

Le deuxième terme dans la partie droite de (6.1) (le log-contrat) peut être répliqué par un portefeuille statique de calls et puts. Soit  $f$  une fonction  $C^2$ . Alors il est facile de démontrer que pour tous  $F, x$  positifs,

$$f(x) = f(F) + f'(F)(x - F) + \int_0^F f''(K)(K - x)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)(x - K)^+ dK.$$

Pour calculer le prix d'une option européenne d'échéance  $T$  et de pay-off  $f(S_T)$ , on pose  $F = S_0 e^{rT}$  et calcule l'espérance de  $e^{-rT} f(S_T)$  sous la probabilité risque-neutre:

$$\text{Prix} = e^{-rT} f(F) + \int_0^F f''(K) P(T, K) dK + \int_F^\infty f''(K) C(T, K) dK,$$

où  $P(T, K)$  est le prix d'un put et  $C(T, K)$  le prix d'un call d'échéance  $T$  et strike  $K$ . En particulier, pour le log-contrat  $f(x) = \log \frac{x}{S_0}$ , on trouve

$$\text{Prix} = e^{-rT} rT - \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

En rajoutant ceci au prix du portefeuille de réplication pour le premier terme de (6.1), on trouve que le prix du portefeuille de réplication pour  $\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds$  est égal à

$$\int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

Finalement, le  $\sigma_K$  qui annule la valeur du swap de variance satisfait

$$e^{-rT} \sigma_K^2 = \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

**L'indice VIX** VIX est l'indice de volatilité d'options sur S&P 500, publié par CBOE. Entre 1993 et 2003, cet indice était calculé comme la moyenne des volatilités implicites de 8 options les plus liquides, mais en 2003 la méthodologie a changé, et le nouvel indice est calculé en prenant en compte toutes les options par la formule (6.1). Le rapport publié sur le site de CBOE (faites un recherche google sur "vix white paper") donne la nouvelle formule: on calcule

$$VIX_T^2 = \frac{2e^{rT}}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_i(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2,$$

pour les deux échéances les plus courtes  $T_1$  et  $T_2$ , où

- $Q_i$  est le prix de l'option (call ou put) qui est hors de la monnaie pour le strike  $K_i$ ;
- $F$  est le forward calculé par la parité call-put;
- $K_0$  est le plus grand strike qui est plus petit que le forward;
- $\Delta K_i$  est l'intervalle entre les strikes.

Le troisième terme est un terme de correction:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^F \frac{P(K) - C(K)}{K^2} dK \\ &\approx \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK - \frac{e^{-rT} (F - K_0)^2}{T K_0^2}. \end{aligned}$$

Pour calculer l'indice VIX, on fait une interpolation linéaire entre  $VIX_{T_1}$  et  $VIX_{T_2}$  pour arriver à une maturité de 30 jours.

## 6.2 Swap de variance pondéré

Un swap de variance pondéré est un actif "théorique" qui généralise et unifie plusieurs contrats existant sur le marché, tels que le swap de variance "corridor", le "swap gamma" etc. Par définition, le swap de variance pondéré a comme pay-off

$$\int_0^T \omega(S_t) d\langle X \rangle_t,$$

où  $X_t = \log S_t$  et  $\omega$  est une fonction qui définit le contrat. Par exemple,  $\omega \equiv 1$  correspond au swap de variance classique,  $\omega(S) = 1_{S \in C}$  définit un swap de variance "corridor", où la variance n'est décompté que si quand la valeur du sous-jacent se trouve dans l'ensemble  $C$ , et  $\omega(S) = \frac{S}{S_0}$  correspond au "swap gamma".

**Réplication du swap de variance pondéré** Soit  $\lambda(y)$  une fonction telle que

$$\lambda''(y) = \frac{2\omega(y)}{y^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega(S_t) d\langle X \rangle_t &= \lambda(S_T) - \lambda(S_0) - \int_0^T \lambda'(S_t) dS_t \\ &= \lambda(S_T) - \lambda(S_0) - \int_0^T \lambda'(S_t) e^{rt} dS_t^* - \int_0^T \lambda'(S_t) r S_t dt \end{aligned}$$

où  $S_t^* = e^{-rt} S_t$ . Dans la formule ci-dessus,

- Le terme  $\lambda(S_T)$  est répliquable par des calls et des puts d'échéance  $T$ : pour  $F$  tel que  $\lambda(F) = \lambda'(F) = 0$ ,

$$\lambda(y) = \int_0^F \frac{2\omega(K)(K-y)^+}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{2\omega(K)(y-K)^+}{K^2} dK.$$

- Le terme  $\int_0^T \lambda'(S_t) e^{rt} dS_t^*$  est la valeur à l'instant  $T$  d'un portefeuille autofinçant de valeur initiale nulle, et contenant  $\delta_t = \lambda'(S_t) e^{-r(T-t)}$  actions à chaque instant  $t$ . En effet, la valeur actualisée  $V_T^*$  de ce portefeuille est donnée par

$$V_T^* = \int_0^T \delta_s dS_s^*$$

et donc

$$V_T = \int_0^T e^{rT} \delta_s dS_s^* = \int_0^T \lambda'(S_t) e^{rt} dS_t^*.$$

- Le dernier terme

$$\int_0^T \lambda'(S_t) r S_t dt$$

est répliquable par des calls et des puts d'échéances entre 0 et  $T$ .

Si la fonction  $\omega$  dépend uniquement du prix actualisé  $S_t^*$  ou du prix du future, ce qui est le cas par exemple pour le swap de variance classique, la stratégie de réplication utilise uniquement les options d'échéance  $T$  et le sous-jacent:

$$\int_0^T \omega(S_t^*) d\langle X \rangle_t = \lambda(S_T^*) - \lambda(S_0) - \int_0^T \lambda'(S_t^*) e^{rt} dS_t^*. \quad (6.2)$$

**Exemples** Pour le swap de variance classique  $\omega \equiv 1$  et on peut utiliser la formule (6.2), avec

$$\lambda''(y) = \frac{2}{y^2}, \quad \lambda'(y) = \frac{2}{F} - \frac{2}{y} \quad \text{et} \quad \lambda(y) = -2 \log \frac{y}{F} + 2 \frac{y}{F} - 2.$$

Pour le swap de variance ‘‘corridor’’,

$$\omega(y) = 1_{y \in C}, \quad \Rightarrow \quad \lambda(y) = 2 \int_{[0, F] \cap C} \frac{(K - y)^+}{K^2} dK + 2 \int_{[F, \infty] \cap C} \frac{(y - K)^+}{K^2} dK.$$

La réplication se fait donc avec les options dont les strikes se trouvent dans le même couloir  $C$ . En pratique, lorsqu’on réplique un swap de variance classique avec les options cotées sur le marché, on réplique toujours un swap de variance ‘corridor’ puisque les strikes disponibles sont limit es. La réplication cesse alors d’ˆetre efficace si le sous-jacent sort du couloir des strikes disponibles.

### 6.3 Options sur variance réalisée

Les options de type call ou put sur la variance réalisée ont le pay-off  $(V_T - Q)^+$  ou  $(Q - V_T)^+$ , ou  $V_T = \int_0^T \sigma_t^2 dt$  est la variance réalisée (on utilise toujours l’approximation continue). Les options sur variance réalisée ne peuvent pas ˆetre r eplic ees par un portefeuille statique d’options européennes comme c’est le cas pour les swaps de variance. Cependant, il existent des stratégies de sous et sur-réplication, qui permettent d’obtenir des bornes précises sur les prix de ces produits. Dans cette section nous présentons une méthode de sous-réplication d’une option call sur variance réalisée (borne inférieure) due à B. Dupire, voir aussi [6] pour les extensions.

Soit  $\tau_Q = \inf\{t : V_t \geq Q\}$  et soit  $\lambda(y) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe  $C^2$  telle que  $\lambda''(y) \leq \frac{2}{y^2}$  pour tout  $y$ . Par la formule d’Itˆo,

$$V_T \geq \lambda(S_T^*) - \lambda(S_0^*) - \int_0^T \lambda'(S_t^*) dS_t^*$$

Si  $\tau_Q \leq T$  alors en  $\tau_Q$  l’option sur variance devient un swap de variance standard, qui admet un portefeuille de sous-réplication de valeur en  $\tau_Q$

$$\lambda(S_T^*) - \lambda(S_{\tau_Q}^*) - \int_{\tau_Q}^T \lambda'(S_t^*) dS_t^*. \quad (6.3)$$

Soit  $h(t, x)$  une fonction vérifiant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad h(Q, x) = \lambda(x).$$

Alors par Itˆo,

$$h(V_t, S_t^*) = h(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x} dS_s^*$$

et en particulier,

$$\lambda(S_{\tau_Q}^*) = h(Q, S_{\tau_Q}^*) = h(0, 0) + \int_0^{\tau_Q} \frac{\partial h}{\partial x} dS_t^*.$$

Les deux autres termes de (6.3) peuvent ˆetre r eplic es de manière habituelle en utilisant des options européennes d’échéance  $T$  et le sous-jacent. Tout cela implique que sur l’ ev enement  $\{\tau_Q \leq T\}$ , l’option sur variance est sous-r eplic ee par le portefeuille

$$\lambda(S_T^*) - h(0, 0) - \int_0^{\tau_Q \wedge T} \frac{\partial h}{\partial x}(V_t, S_t^*) dS_t^* - \int_{\tau_Q \wedge T}^T \lambda'(S_t^*) dS_t^*. \quad (6.4)$$

On a par ailleurs  $h(0, 0) = BS(S_0, Q, \lambda)$ , où  $BS$  est le prix Black-Scholes d’une option de pay-off  $\lambda$  et de maturité  $Q$ , lorsque la valeur initiale du sous-jacent est égale à  $S_0$  et la volatilité est égale à 1.



Montrons que (6.4) donne une stratégie de sous-réplication sur l'événement  $\{\tau_Q > T\}$ . Dans ce cas, le pay-off de l'option sur variance est nul, et l'expression (6.4) se réduit à

$$\lambda(S_T^*) - h(0, 0) - \int_0^T \frac{\partial h}{\partial x}(V_t, S_t^*) dS_t^* = \lambda(S_T^*) - h(V_T, S_T^*),$$

et la convexité de  $\lambda$  implique que la partie droite est négative.

La valeur initiale du portefeuille de sous-réplication (6.4) est donnée par

$$\mathbb{E}[e^{-rT} \lambda(S_T^*)] - e^{-rT} BS(S_0, Q, \lambda) = e^{-rT} \int_0^\infty \lambda''(K) \{ \mathbb{E}[\text{Eur}_K(S_T^*)] - BS(S_0, Q, \text{Eur}_K) \},$$

où

$$\text{Eur}_K(y) = (y - K)^+ 1_{K \geq S_0} + (K - y)^+ 1_{K < S_0}.$$

En notant par  $V^{imp}(T, K)$  la variance implicite d'une option européenne de strike  $K$  et maturité  $T$ , c'est-à-dire, la quantité  $I^2 T$  avec  $I$  la volatilité implicite, le coût du portefeuille de sous-couverture (et la borne inférieure pour le prix de l'option) se réécrit comme

$$e^{-rT} \int_0^\infty \lambda''(K) \{ BS(S_0, V^{imp}(T, K), \text{Eur}_K) - BS(S_0, Q, \text{Eur}_K) \}.$$

Pour trouver la meilleure borne inférieure pour le prix de l'option, il faut maximiser cette expression par rapport à  $\lambda$ , en respectant les contraintes de convexité et  $\lambda'' \leq \frac{2}{y^2}$ . La solution est immédiate et donnée par

$$\lambda''(K) = \frac{2}{K^2} 1_{V^{imp}(T, K) \geq Q} \quad \Rightarrow \quad \lambda(y) = \int_{\{K: V^{imp}(T, K) > Q\}} \frac{2}{K^2} \text{Eur}_K(y) dK.$$

On a trouvé donc une borne inférieure pour le prix d'une option call sur variance réalisée, donnée par

$$e^{-rT} \int_{\{K: V^{imp}(T, K) > Q\}} \frac{2}{K^2} \{ BS(S_0, V^{imp}(T, K), \text{Eur}_K) - BS(S_0, Q, \text{Eur}_K) \}.$$

Remarquons que le prix de réplication d'un swap de variance classique peut être réécrit comme

$$e^{-rT} \int_{(0, \infty)} \frac{2}{K^2} \{ BS(S_0, V^{imp}(T, K), \text{Eur}_K) - BS(S_0, Q, \text{Eur}_K) \}.$$

## 6.4 Lien avec les options américaines et le plongement de Skorokhod

Dans cette section, nous suivons le traitement des articles [36] et [6]. Plaçons-nous dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique sous la probabilité martingale

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dW_t,$$

et intéressons-nous pour l'instant à la variance intégrée "linéaire" et non logarithmique:  $V_t = \langle S \rangle_t$ . Puisque  $M_t := S_t - S_0$  est une martingale continue avec  $M_0 = 0$ , le théorème de Dambis-Dubins-Schwartz implique que

$$B_t := M_{\inf\{u: \langle M \rangle_u \geq t\}} = M_{\inf\{u: V_u \geq t\}}$$

est un mouvement brownien, tel que

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t} \quad \text{et} \quad S_t = S_0 + B_{\langle M \rangle_t}. \quad (6.5)$$

On souhaiterait trouver des bornes sur le prix d'une option de pay-off  $F(V_T, S_T)$  à l'instant  $T$  sans faire d'hypothèses sur le modèle de la volatilité, comme on vient de le faire pour le call sur variance réalisée. En utilisant la représentation (6.5), on a alors:

$$\sup_{\sigma} \mathbb{E}[F(V_T, S_T)] = \sup_{\sigma} \mathbb{E}[F(\langle S \rangle_T, S_0 + B_{\langle S \rangle_T})] = \sup_{\tau} \mathbb{E}[F(\tau, S_0 + B_{\tau})], \quad (6.6)$$

où le sup est pris sur l'ensemble de tous les temps d'arrêt dans la filtration de  $B$ , puisque  $\langle S \rangle_T$  est un tel temps d'arrêt. Le même résultat est valable avec inf au lieu de sup. Nous avons ainsi démontré qu'une option sur variance réalisée de pay-off très général est équivalent à une option américaine dans un modèle brownien avec volatilité constante, une grande simplification du point de vue de calcul.

Les bornes données par l'équivalence (6.6) sont très larges en pratique, puisqu'on ne fait aucune hypothèse sur la volatilité et n'utilise pas les données de marché. Par exemple, pour un swap de variance classique on trouve  $(0, \infty)$ . Des bornes plus précises peuvent être obtenues en rajoutant les 'contraintes de calibration'. Supposons qu'on dispose de prix d'options européennes de tous les strikes, et d'échéance  $T$ . Ces options permettent de reconstruire la loi de  $S_T - S_0$ , notée par  $\mu$ , et le problème (6.6) doit alors être résolu sous la contrainte additionnelle  $S_T - S_0 \sim \mu$ , ou bien  $B_\tau \sim \mu$ . Autrement dit, le sup dans (6.6) doit être calculé sur l'ensemble des temps d'arrêt  $\tau$  tels que  $B_\tau \sim \mu$ . La recherche d'un tel temps d'arrêt fait l'objet du célèbre "problème de Skorokhod" ou "problème de plongement de Skorokhod [52] (Skorokhod embedding problem en anglais):

$$\text{Etant donné une loi } \mu \text{ avec } \int x\mu(dx) = 0 \text{ et } \int x^2\mu(dx) < \infty, \\ \text{trouver un temps d'arrêt } \tau \text{ avec } \mathbb{E}[\tau] < \infty \text{ tel que } B_\tau \sim \mu.$$

Si  $S_T - S_0 \sim \mu$ , alors  $\langle S \rangle_T$  est une solution du problème de Skorokhod, puisque  $B_{\langle S \rangle_T}$  a la loi  $\mu$ . Inversement, si  $\tau$  est une solution du problème de Skorokhod, alors  $S_t := B_{\tau \wedge \frac{t}{T}}$  est une martingale continue vérifiant  $S_T - S_0 \sim \mu$ . Par conséquent,

$$\sup_{\sigma, S_T \sim \mu} \mathbb{E}[F(V_T, S_T)] = \sup_{\tau \text{ solution de Skorokhod}} \mathbb{E}[F(\tau, S_0 + B_\tau)] \quad (6.7)$$

et pareil pour le inf.

L'ensemble des prix d'un produit sur variance réalisée sous contraintes de calibration est donc décrit par l'ensemble des différentes solutions du problème de Skorokhod. Le problème de Skorokhod a plusieurs solutions [46], mais certaines d'entre elles ont des propriétés de minimalité / maximalité spécifiques, qui permettent de caractériser le sup / inf dans (6.7) pour certains produits. Nous donnerons ci-dessous quelques exemples de solutions.

**Solution de Hall [32]** Soit

$$c = \int_0^\infty x\mu(dx).$$

On introduit

$$\rho(du, dv) = \frac{|u| + v}{c} \mu(du)\mu(dv)1_{u < 0}1_{v \geq 0}$$

et pose  $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (U, V)\}$ , où  $(U, V)$  est un couple de variables aléatoires de loi  $\rho(du, dv)$ . Il est alors facile de montrer que  $B_\tau$  a comme loi  $\mu$ . Soit  $u < 0$  pour fixer les idées. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_\tau \in du] &= \int_{v \in [0, \infty)} \mathbb{P}[U \in du, V \in dv] \mathbb{P}[B_\tau = u | U \in du, V \in dv] \\ &= \int_{v \in [0, \infty)} \rho(du, dv) \frac{v}{|u| + v} = \mu(du) \int_0^\infty \frac{v}{c} \mu(dv) = \mu(du), \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème d'arrêt pour la martingale  $(B_t)$  pour calculer la probabilité  $\mathbb{P}[B_\tau = u | U \in du, V \in dv]$ . Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tau | U, V]] = \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \rho(du, dv) \left\{ \frac{u^2 v}{|u| + v} + \frac{v^2 u}{|u| + v} \right\} = \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \rho(du, dv) |u| v = \int_{-\infty}^0 u^2 \mu(du),$$

où on a appliqué le théorème d'arrêt pour la martingale  $(B_t^2 - t)$  pour le calcul de l'espérance de  $\tau$ .

La solution de Hall est l'une des plus simples, mais elle a l'inconvénient de nécessiter un aléa supplémentaire sous la forme de variables  $U$  et  $V$ , et ne possède pas de propriétés d'optimalité d'un intérêt particulier pour les options sur variance.

**Solutions de Root [49] et Rost [50]** Pour une fonction  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on définit la région  $R_b := \{(t, x) : t \geq b(x)\}$  et le temps d'entrée dans  $R_b$ :  $\tau_b := \inf\{u : (u, b) \in R_b\}$ . Le résultat suivant a été démontré par Root [49].

**Théorème 5.** *Pour tout  $\mu$  avec  $\int x\mu(dx) = 0$  et  $\int x^2\mu(dx) < \infty$ , il existe une fonction  $b$  telle que  $\tau_b$  est la solution du problème de Skorokhod correspondant à  $\mu$ . Le temps d'arrêt  $\tau_b$  minimise  $\mathbb{E}[f(\tau)]$  pour tout fonction convexe  $f$ , parmi toutes les solutions du problème de Skorokhod correspondant à  $\mu$ .*

Pour  $F(V_T, S_T) = f(V_T)$  avec  $f$  une fonction convexe,

$$\inf_{\sigma, S_T \sim \mu} \mathbb{E}[F(V_T, S_T)] = \inf_{\tau \text{ solution de Skorokhod}} \mathbb{E}[F(\tau, S_0 + B_\tau)]$$

est alors atteint sur la solution de Root. Un résultat similaire pour le supremum est dû à Rost [50].

**Théorème 6.** *Soit  $\bar{R}_b := \{(t, x) : t \leq b(x)\}$  et  $\bar{\tau}_b := \inf\{u : (u, b) \in \bar{R}_b\}$ . Pour tout  $\mu$  sans atome en 0 avec  $\int x\mu(dx) = 0$  et  $\int x^2\mu(dx) < \infty$ , il existe une fonction  $b$  telle que  $\bar{\tau}_b$  est la solution du problème de Skorokhod correspondant à  $\mu$ . Le temps d'arrêt  $\bar{\tau}_b$  maximise  $\mathbb{E}[f(\tau)]$  pour tout fonction convexe  $f$ , parmi toutes les solutions du problème de Skorokhod correspondant à  $\mu$ .*

Dans le cas de la variance "logarithmique"  $V_t = \langle \log S \rangle_t$ , on a la représentation

$$\log S_t = M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t = B_{\langle M \rangle_t} - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t$$

pour une martingale continue  $M$ . On a alors

$$S_t = Z_{\langle M \rangle_t} = Z_{\langle \log S \rangle_t} \quad \text{avec} \quad Z_t = e^{W_t - \frac{t}{2}},$$

et l'équivalence

$$\sup_{\sigma, S_T \sim \mu} \mathbb{E}[F(\langle \log S \rangle_T, S_T)] = \sup_{\tau: Z_\tau \sim \mu} \mathbb{E}[F(\tau, Z_\tau)].$$

Au lieu du plongement de Skorokhod dans le mouvement brownien, il nous faut maintenant trouver un plongement d'une loi  $\mu$  sur  $(0, \infty)$  avec  $\int x\mu(dx) = 1$  dans le processus  $Z$ . La théorie est sensiblement la même, et en particulier les résultats de Root et Rost restent valables dans ce cas. Pour une option call sur variance réalisée on a en particulier

$$\mathbb{E}[(\tau_{\text{ROST}} - Q)^+] \geq \mathbb{E}[(\langle \log S \rangle_T - Q)^+] \geq \mathbb{E}[(\tau_{\text{ROOT}} - Q)^+].$$

La frontière optimale  $b(x)$  dans les solutions de Root et Rost peut être calculée numériquement en résolvant un problème de frontière libre [6]. Par exemple, pour la solution de Root, lorsque  $\mu$  admet une densité notée également par  $\mu$ , la densité de  $W_{t \wedge \tau}$  vérifie

$$\begin{aligned} p(0, y) &= \delta(y - 1) \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \\ p(b(y), y) &= \mu(y). \end{aligned}$$



# Appendix A

## Méthodes numériques pour la calibration de modèles

### A.1 Algorithmes d'optimisation

#### A.1.1 Optimisation: rappels théoriques

Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  et  $K \subseteq H$ . On dit que  $u^* \in K$  est un minimum *global* de  $J$  sur  $K$  si

$$\forall u \in K, \quad J(u^*) \leq J(u).$$

$u^* \in K$  est un minimum *local* de  $J$  sur  $K$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\|u^* - u\| \leq \delta$  implique  $J(u^*) \leq J(u)$ .

Une fonction  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  est semicontinue inférieurement (sci) si pour toute suite  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  telle que  $\lim u_n = u$ ,

$$J(u) \leq \liminf J(u_n)$$

On rappelle qu'un ensemble  $K \subseteq H$  est un compact (plus précisément,  $K$  est séquentiellement compact) si à partir de toute suite  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K$  on peut extraire une sous-suite  $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq K$  telle que  $\lim u_{n_k} \in K$ . Un ensemble  $K \subset \mathbb{R}^n$  est compact si et seulement s'il est fermé et borné. Ceci n'est plus vrai en dimension infini.

**Théorème 7.** *Soit  $J$  une fonction sci et  $K$  un ensemble compact. Alors  $J$  admet un minimum global sur  $K$ .*

**Corollaire 1** (existence de minimum dans  $\mathbb{R}^n$ ). *Soit  $K$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $J : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sci "infinie à l'infini":*

$$\lim_n J(u_n) = \infty \quad \text{si} \quad \lim_n \|u_n\| \rightarrow \infty$$

*Alors  $J$  admet un minimum global sur  $K$ .*

**Fonctions convexes** Un ensemble  $K$  est *convexe* si  $\forall u, v \in K \forall \theta \in [0, 1]$ ,

$$\theta u + (1 - \theta)v \in K$$

Soit  $K$  un ensemble convexe. Une fonction  $J : K \rightarrow \mathbb{R}$  est *convexe* si  $\forall u, v \in K \forall \theta \in [0, 1]$ ,

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \theta J(u) + (1 - \theta)J(v)$$

On dit que  $J$  est *strictement convexe* si l'inégalité est stricte dès que  $u \neq v$  et  $\theta \in (0, 1)$ .

**Théorème 8** (Minimisation d'une fonction convexe). *Soit  $K \subseteq H$  un ensemble convexe fermé et soit  $J : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe sci "infinie à l'infini":*

$$\lim_n J(u_n) = \infty \quad \text{si} \quad \lim_n \|u_n\| \rightarrow \infty$$

*Alors  $J$  admet un minimum global sur  $K$ . Si  $J$  est strictement convexe, le minimum est unique.*

### A.1.2 Problèmes d'optimisation en finance

Les différents problèmes d'optimisation en finance nécessitent des algorithmes différents:

1. Programmation linéaire:

$$\inf \langle a, x \rangle \quad \text{s. c.} \quad Bx \geq b$$

Exemple: optimisation de rendement de portefeuille sous contraintes de trading. Solution: méthode de simplexe.

2. Programmation quadratique:

$$\inf \langle Ax, x \rangle \quad \text{s. c.} \quad Bx \geq b$$

Exemple: minimisation de la variance de portefeuille sous contraintes de rendement et de trading.

3. Minimisation d'une fonction convexe (ou presque) et différentiable. Exemple: problèmes de calibration régularisés. Solution: méthodes de gradient, gradient conjugué ou quasi-newton.

4. Minimisation d'une fonction non convexe et/ou non différentiable. Exemple: problèmes de calibration sans régularisation. Solution possible: algorithmes évolutionnaires.

Dans cet section on se concentre sur les méthodes de minimisation des fonctions convexes.

### A.1.3 Minimisation de fonctions convexes

Dans cette section, on étudie les algorithmes permettant de minimiser une fonction convexe  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Les *méthodes de descente* consistent à faire déplacer un point dans l'espace de recherche
- Dans les algorithmes à *pas optimal*, à l'itération  $n$ , une direction de descente  $p^n$  est choisie puis on résout un problème de minimisation unidimensionnelle:

$$u^{n+1} = u^n + \lambda^* p^n, \quad \lambda^* = \arg \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} J(u^n + \lambda p^n)$$

- Si  $J$  n'est pas convexe, ces algorithmes trouvent un minimum local.

Un algorithme d'optimisation unidimensionnelle est donc un bric de base pour presque tous les méthodes multidimensionnelles.

**Optimisation unidimensionnelle** Les algorithmes de minimisation unidimensionnelle s'inspirent des méthodes de solution d'équations: bisection, méthode de Newton ou combinaison de deux. Pour démarrer, ces algorithmes nécessitent le plus souvent que le minimum soit déjà localisé: il faut trouver 3 nombres  $a < b < c$  tels que  $f(b) < f(a)$  et  $f(b) < f(c)$ . L'algorithme "golden section search", analogue à la bisection, procède ensuite par itérations successives:

- Choisir un point  $x$ , soit dans  $(a_n, b_n)$  soit dans  $(b_n, c_n)$ . Supposons pour fixer les idées que  $x \in (b_n, c_n)$ .
- Si  $f(b_n) < f(x)$ , poser

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = (a_n, b_n, x);$$

sinon poser

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = (b_n, x, c_n).$$

Le fonctionnement de cet algorithme est représenté graphiquement sur la fig. A.1. La règle optimale pour le choix de  $x$  consiste à prendre

$$\begin{aligned} x &= b_n + w(c_n - b_n), & \text{si } c_n - b_n > b_n - a_n \\ x &= b_n - w(b_n - a_n), & \text{sinon,} \end{aligned}$$

où

$$w = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

est le 'nombre d'or'.

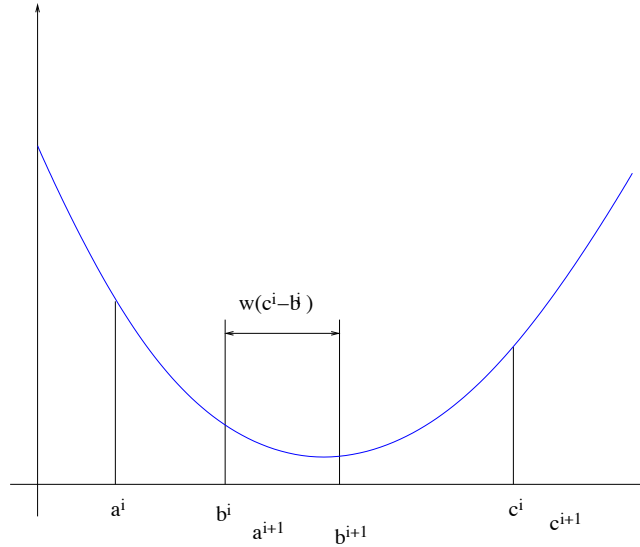


Figure A.1: L'algorithme "golden section search" pour la recherche de minimum en une dimension.

**Algorithme de relaxation** La méthode la plus intuitive pour minimiser une fonction  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  consiste à la minimiser successivement suivant chaque dimension. Pour calculer l'itération  $u^{i+1}$  à partir de  $u^i$ , on pose,

$$\begin{aligned} u_1^{i+1} &= \arg \inf_u J(u, u_2^i, \dots, u_n^i) \\ u_2^{i+1} &= \arg \inf_u J(u_1^{i+1}, u, u_3^i, \dots, u_n^i) \\ &\dots \\ u_n^{i+1} &= \arg \inf_u J(u_1^{i+1}, \dots, u_{n-1}^{i+1}, u) \end{aligned}$$

Figure A.2, graphique de gauche, montre le fonctionnement de cet algorithme pour la fonction

$$f(x, y) = (x + y)^2 + \frac{1}{20}(x - y)^2.$$

On voit que la performance peut être améliorée en choisissant bien la direction de descente.

**Algorithme de gradient à pas optimal** Dans cet algorithme, on cherche à aller toujours dans la direction de décroissance la plus rapide de la fonction  $J$ . Pour calculer l'itération  $u^{i+1}$  à partir de  $u^i$ , on pose,

$$\begin{aligned} u^{i+1} &= u^i - \lambda^i J'(u^i) \\ \text{où } \lambda^i &= \arg \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} J(u^i - \lambda J'(u^i)) \end{aligned}$$

Comme le montre fig. A.2, graphique de droite, il n'est pas toujours judicieux de choisir la direction de descente la plus rapide!

**Algorithme de gradient conjugué** L'algorithme de gradient conjugué choisit la meilleure direction en tenant compte non seulement de l'endroit où l'on se trouve, mais aussi de toutes les directions que l'on avait choisies auparavant. Supposons dans un premier temps:

$$J(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u)$$

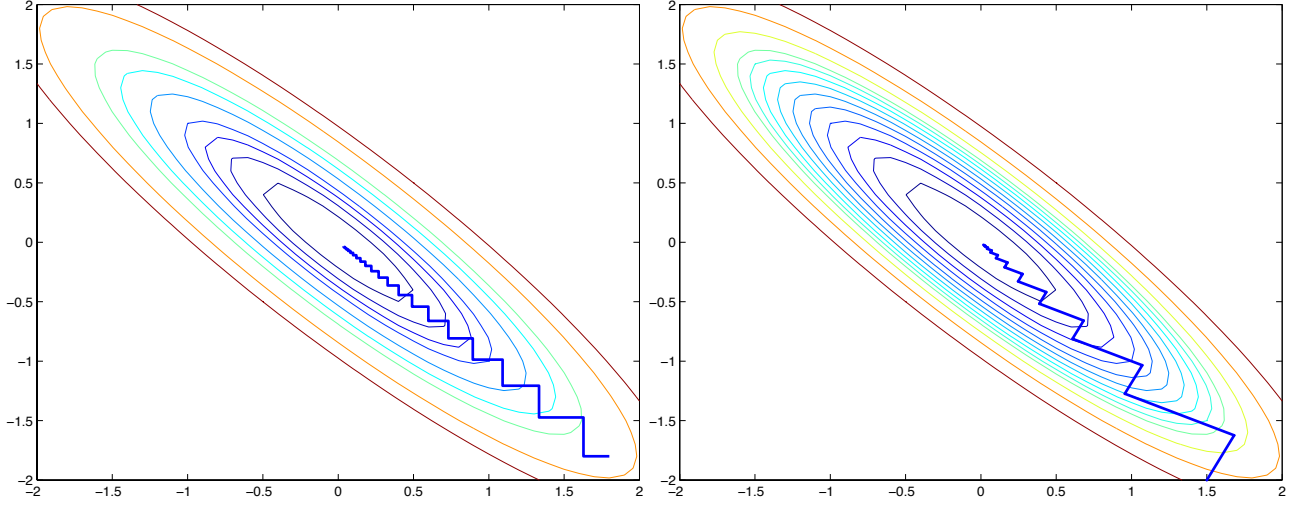


Figure A.2: Gauche: Algorithme de relaxation (minimisation successive suivant chaque dimension). Droite: Algorithme de gradient à pas optimal. Les ellipses sur chaque graphique sont les lignes de niveau de la fonction à minimiser.

Dans ce contexte la méthode de gradient s'écrit:

$$u^{n+1} = \arg \inf_{u \in u^n + \mathcal{L}(J'(u^n))} J(u)$$

La méthode de *gradient conjugué* propose:

$$u^{n+1} = \arg \inf_{u \in u^n + \mathcal{L}(J'(u^0), \dots, J'(u^n))} J(u)$$

La condition de 1er ordre implique:

$$\forall n, \quad \langle J'(u^n), J'(u^k) \rangle = 0 \quad \forall k < n$$

Soit  $p^n := u^{n+1} - u^n$  le  $n$ -ième pas de l'algorithme. Alors

$$\langle Ap^n, J'(u^k) \rangle = 0 \quad \forall k < n$$

Ceci implique que  $Ap^n \in \mathcal{L}(J'(u^0), \dots, J'(u^{n-1}))^\perp$  et donc

$$\langle Ap^n, p^k \rangle = 0 \quad \forall k < n \tag{A.1}$$

Les vecteurs  $(p^k)_{1 \leq k \leq n}$  sont dits conjugués par rapport à  $A$ .

Pour chaque  $n$ , il existe  $x \in \mathcal{L}(J'(u^0), \dots, J'(u^{n-1}))$  tel que

$$p^n = \alpha J'(u^n) + x$$

La relation de conjugaison (A.1) implique que pour tout  $k < n - 1$ ,  $\langle Ax, p^k \rangle = 0$  et donc  $x \sim p^{n-1}$ . Il existent alors  $z^n, k^n \in \mathbb{R}$  et  $\lambda^n \in \mathbb{R}$  avec

$$p^n = \lambda^n z^n \quad \text{et} \quad z^n = J'(u^n) + k^n z^{n-1}$$

La relation (A.1) donne à nouveau:  $\langle z^n, Az^{n-1} \rangle = 0$  et

$$k^n = -\frac{\langle J'(u^n), Az^{n-1} \rangle}{\langle z^{n-1}, Az^{n-1} \rangle} = \frac{\|J'(u^n)\|^2}{\|J'(u^{n-1})\|^2}$$



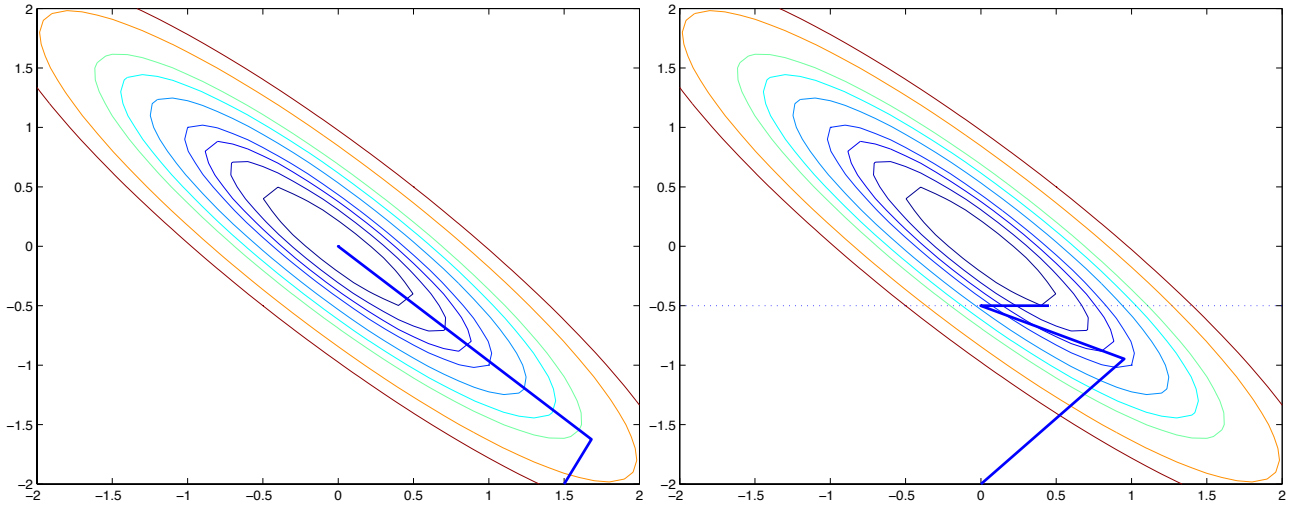


Figure A.3: Gauche: méthode de gradient conjugué. Droite: méthode de gradient avec projection.

Version finale de l'algorithme:

Initialisation:  $u^0, z^0 = J'(u^0)$

$$u^{n+1} = u^n + \lambda z^n$$

$$\text{où } \lambda = \arg \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} J(u^n + \lambda z^n)$$

$$z^{n+1} = J'(u^{n+1}) + \frac{\|J'(u^{n+1})\|^2}{\|J'(u^n)\|^2} z^n$$

L'algorithme permet de minimiser une forme quadratique  $N$ -dimensionnelle en  $N$  itérations (voir fig. A.3, graphique de gauche). Il est aussi efficace pour des fonctions convexes générales.

**Méthodes de type Newton** Dans les méthodes de type Newton, on utilise non seulement le gradient de  $J$  mais aussi sa matrice Hessienne  $J''$ . Pour calculer l'itération  $u^{i+1}$  à partir de  $u^i$ , on écrit un développement de  $J$  autour de  $u^i$ :

$$J(u) \approx J(u^i) + J'(u^i)(u - u^i) + \frac{1}{2}(u - u^i)^* J''(u^i)(u - u^i)$$

Cette expression est minimale pour

$$u = u^i - \{J''(u^i)\}^{-1} J'(u^i)$$

La méthode de Newton consiste à poser

$$u^{i+1} = u^i - \{J''(u^i)\}^{-1} J'(u^i)$$

Avantages des méthodes de type Newton

- Minimisation d'une forme quadratique en une itération.
- Convergence quadratique près de minimum.

Les défauts

- Le calcul et l'inversion de  $J''$  est nécessaire.
- La performance est mauvaise si  $J''$  n'est pas définie positive ou si  $J$  ne ressemble pas à une forme quadratique.

Solution: méthodes *quasi-Newton* (e.g. BFGS): à chaque itération, on utilise  $J'$  pour mettre à jour une approximation de  $J''$  qui reste toujours définie positive.

**Optimisation sous contraintes** On cherche à résoudre

$$\inf_{u \in K} J(u),$$

où  $K$  est typiquement un ensemble convexe fermé. En cas de contraintes d'égalité, on essaie, si possible de passer aux variables indépendantes ou introduire les multiplicateurs de Lagrange. En cas de contraintes d'inégalité: méthodes de projection ou pénalisation de contraintes.

**Méthode de gradient avec projection** L'algorithme de gradient à pas optimal avec projection consiste à projeter la solution sur l'ensemble admissible après chaque itération de la méthode de gradient. Pour calculer l'itération  $u^{i+1}$  à partir de  $u^i$ , on pose,

$$u^{i+1} = P_K(u^i - \lambda^i J'(u^i)),$$

où  $\lambda^i = \arg \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} J(u^i - \lambda J'(u^i)).$

Si l'ensemble  $K$  est un rectangle

$$K = [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n],$$

l'opérateur de projection a la forme particulièrement simple:

$$[P_K u]_i = \min(b_i, \max(a_i, u_i)).$$

Figure A.3, graphique de droite, illustre le fonctionnement de cet algorithme pour l'ensemble de contraintes  $K = \{(x, y) : y \leq -0.5\}$ .

**Méthodes de pénalisation de contraintes** Soit  $K$  de la forme

$$K = \{u : F_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, M\}$$

avec les fonctions  $F_i$  convexes et continues. La méthode de pénalisation de contraintes consiste à remplacer le problème initial par un nouveau problème sans contraintes et avec une fonction d'objectif modifiée:

$$u_\varepsilon = \arg \inf_{v \in \mathbb{R}^n} \left( J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^M \max(F_i(v), 0) \right).$$

Le problème pénalisé reste alors convexe et on peut démontrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = \arg \inf_{v \in K} J(v).$$

## Bibliographie et liens .

- Méthodes numériques générales; description et code source de nombreux algorithmes d'optimisation sans contrainte  
W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, AND B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing*. Livre disponible sur internet: [www.nr.com](http://www.nr.com)
- Implémentation professionnelle de la méthode BFGS avec contraintes de type intervalle  
C. ZHU, R. H. BYRD AND J. NOCEDAL, *L-BFGS-B: Algorithm 778: L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimisation*.  
[www.ece.northwestern.edu/~nocedal/lbfgsb.html](http://www.ece.northwestern.edu/~nocedal/lbfgsb.html)

## Appendix B

# Quelques rappels sur le calcul stochastique et les processus de Markov

**Théorème 9** (Critère de Novikov). *Soit  $M$  une martingale locale continue et supposons que*

$$E[e^{\frac{1}{2}\langle M \rangle_\infty}] < \infty$$

*Alors  $\mathcal{E}(M) := (e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t})_{t \geq 0}$  est une martingale uniformément intégrable.*

**Approximation d'un processus de diffusion par une chaîne de Markov** Soit  $X$  une diffusion markovienne:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

où  $W$  est un mouvement standard, et pour tout  $h > 0$ , soit  $\{X_n^h\}_{n \geq 1}$  une chaîne de Markov. On dit que la famille de chaînes de Markov  $\{X_n^h\}_{n \geq 1}^{h > 0}$  est localement consistante avec  $X$  si elle satisfait les conditions suivantes:

$$E[\Delta X_n^h | X_n^h] = \mu(X_n^h)h + o(h),$$

$$\text{Var}[\Delta X_n^h | X_n^h] = a(X_n^h)h + o(h),$$

$$\sup_{n, \omega} |\Delta X_n^h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

où on utilise la notation  $\Delta X_n^h := X_{n+1}^h - X_n^h$  et  $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^\perp$ .

**Théorème 10** (Approximation par chaîne de Markov, [41]). *Soit  $\sigma$  et  $\mu$  continus et bornés et soit  $\{X_n^h\}_{n \geq 1}^{h > 0}$  une famille de chaînes de Markov faiblement consistante avec  $X$ . Alors le processus interpolé défini par*

$$\tilde{X}_t^h = X_{[t/h]}^h$$

*converge faiblement vers une diffusion markovienne avec dérive  $\mu$  et coefficient de diffusion  $\sigma$ .*



# Bibliographie

- [1] O. E. BARNDORFF-NIELSEN AND N. SHEPHARD, *Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models*, J. R. Statistic. Soc. B, 64 (2002), pp. 253–280.
- [2] E. BENHAMOU, E. GOBET, AND M. MIRI, *Smart expansion and fast calibration for jump diffusions*, Finance and Stochastics, 13 (2009), pp. 563–589.
- [3] H. BERESTYCKI, J. BUSCA, AND I. FLORENT, *Asymptotics and calibration of local volatility models*, Quant. Finance, 2 (2002), pp. 61–69.
- [4] T. BOLLERSLEV, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31 (1986), pp. 307–327.
- [5] M. BROADIE AND Ö. KAYA, *Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes*, Operations Research, 54 (2006), pp. 217–231.
- [6] P. CARR AND R. LEE, *Hedging variance options on continuous semimartingales*, Finance and Stochastics, 14 (2010), pp. 179–207.
- [7] P. CARR AND D. MADAN, *Towards a theory of volatility trading*, in Volatility, R. Jarrow, ed., Risk Publications, 1998.
- [8] M. CHESNEY, M. JEANBLANC, AND M. YOR, *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer, London, 2009.
- [9] T. F. COLEMAN, Y. LEE, AND A. VERNA, *Reconstructing the unknown local volatility function*, J. Comput. Finance, 2 (1999), pp. 77–102.
- [10] J. W. COOLEY AND J. W. TUKEY, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp., 19 (1965), pp. 297–301.
- [11] J. C. COX, *The constant elasticity of variance option pricing model*, Journal of Portfolio Management, 22 (1996), pp. 15–17.
- [12] J. C. COX, J. E. INGERSOLL, JR., AND S. A. ROSS, *An intertemporal general equilibrium model of asset prices*, Econometrica, 53 (1985), pp. 363–384.
- [13] S. CRÉPEY, *Calibration of the local volatility in a trinomial tree using Tikhonov regularization*, Inverse Problems, 19 (2003), pp. 91–127.
- [14] F. DELBAEN AND W. SCHACHERMAYER, *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes*, Math. Ann., 312 (1998), pp. 215–250.
- [15] E. DERMAN, *Regimes of volatility*, RISK, (1999).
- [16] D. DUFFIE, D. FILIPOVIC, AND W. SCHACHERMAYER, *Affine processes and applications in finance*, Ann. Appl. Probab., 13 (2003), pp. 984–1053.
- [17] D. DUFFIE, J. PAN, AND K. SINGLETON, *Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions*, Econometrica, 68 (2000), pp. 1343–1376.

- [18] B. DUPIRE, *Pricing with a smile*, RISK, 7 (1994), pp. 18–20.
- [19] N. EL KAROUI, *Couverture des risques dans les marchés financiers*. Lecture notes for master 'Probability and Finance', Paris VI university.
- [20] R. F. ENGLE, *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of united kingdom inflation*, Econometrica, 50 (1982), pp. 987–1008.
- [21] M. FORDE AND A. JACQUIER, *Small-time asymptotics for implied volatility under the heston model*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 12 (2009), pp. 861–876.
- [22] M. FORDE AND A. JACQUIER, *The large-maturity smile for the Heston model*, Finance and Stochastics, 15 (2011), pp. 755–780.
- [23] P. FRIZ AND S. BENAÏM, *Regular variation and smile asymptotics*, Mathematical Finance, 19 (2009), pp. 1–12.
- [24] M. B. GARMAN AND S. W. KOHLHAGEN, *Foreign currency option values*, Journal of International Money and Finance, 2 (1983), pp. 231–237.
- [25] J. GATHERAL, *A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives*. Presentation at the 2004 Global Derivatives conference, available from [http://www.math.nyu.edu/fellows\\_fin\\_math/gatheral/gatheral.htm](http://www.math.nyu.edu/fellows_fin_math/gatheral/gatheral.htm), 2004.
- [26] J. GATHERAL, *The Volatility Surface: a Practitioner's Guide*, Wiley Finance, 2006.
- [27] J. GATHERAL, E. HSU, P. LAURENCE, C. OUYANG, AND T. WANG, *Asymptotics of implied volatility in local volatility models*, Mathematical Finance, Published online (2010).
- [28] J. GATHERAL AND A. JACQUIER, *Arbitrage-free svi volatility surfaces*. Preprint SSRN, 2012.
- [29] P. GLASSERMAN, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, New York, 2003.
- [30] E. GOBET AND M. MIRI, *Time dependent heston model*, SIAM Journal on Financial Mathematics, 1 (2010), p. 289.
- [31] P. S. HAGAN AND D. E. WOODWARD, *Equivalent black volatilities*, Applied Mathematical Finance, 6 (1999), pp. 147–157.
- [32] W. HALL, *On the skorokhod embedding theorem*, Tech. Rep. 33, Stanford Univ., Dept. of Stat., 1968.
- [33] J. HARRISON AND D. KREPS, *Martingales and arbitrage in multiperiod security markets*, J. Economic Theory, 2 (1979), pp. 381–408.
- [34] T. HAYASHI AND P. A. MYKLAND, *Hedging errors: an asymptotic approach*, Mathematical Finance, 15 (2005), pp. 309–343.
- [35] S. HESTON, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Rev. Fin. Studies, 6 (1993), pp. 327–343.
- [36] D. HOBSON, *The skorokhod embedding problem and model-independent bounds for option prices*, in Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance, Springer, 2010.
- [37] N. JACKSON, E. SÜLI, AND S. HOWISON, *Computation of deterministic volatility surfaces*, Journal of Computational Finance, 2 (1999), pp. 5–32.
- [38] R. P. JENA AND P. TANKOV, *Arbitrage opportunities in misspecified stochastic volatility models*, SIAM Journal on Financial Mathematics, 2 (2011), pp. 317–341.
- [39] M. KELLER-RESSEL, *Moment explosions and long-term behavior of affine stochastic volatility models*. Forthcoming in Mathematical Finance, 2008.

- [40] M. KELLER-RESSEL AND J. TEICHMANN, *A remark on Gatheral's 'most-likely path approximation' of implied volatility*. Short note, 2009.
- [41] H. J. KUSHNER AND P. DUPUIS, *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer, 2001.
- [42] R. LAGNADO AND S. OSHER, *A technique for calibrating derivative security pricing models: numerical solution of the inverse problem*, J. Comput. Finance, 1 (1997).
- [43] R. LEE, *The moment formula for implied volatility at extreme strikes*, Mathematical Finance, 14 (2004), pp. 469–480.
- [44] R. LORD AND C. KAHL, *Complex logarithms in heston-like models*. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1105998>, 2008.
- [45] D. NUALART, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, 1995.
- [46] J. OBLOJ, *The Skorokhod embedding problem and its offspring*, Probability Surveys, 1 (2004), pp. 321–392.
- [47] P. PROTTER, *Stochastic integration and differential equations*, Springer, Berlin, 1990.
- [48] M. ROMANO AND N. TOUZI, *Contingent claims and market completeness in a stochastic volatility model*, Math. Finance, 7 (1997), pp. 399–410.
- [49] D. H. ROOT, *The existence of certain stopping times on brownian motion*, Ann. Math. Statist., 40 (1969), pp. 715–718.
- [50] H. ROST, *The stopping distributions of a Markov process*, Invent. Math., 14 (1971), pp. 1–16.
- [51] M. RUBINSTEIN, *Implied binomial trees*, Journal of Finance, 49 (1994), pp. 771–819.
- [52] A. V. SKOROKHOD, *Studies in the theory of random processes*, Addison-Wesley Publishing Co, Reading, Mass., 1965. Translated from Russian.
- [53] ZELIADÉ, *Quasi-explicit calibration of Gatheral's SVI model*. Available from [www.zeliade.com](http://www.zeliade.com).
- [54] R. ZHANG, *Couverture approchée des options Européennes.*, PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.