MASTER MODÉLISATION ALÉATOIRE 2ÈME ANNÉE
EXAMEN PARTIEL DE PROCESSUS STOCHASTIQUES EN FINANCE
20 NOVEMBRE 2015, 14H45–17H45, AMPHITHÉÂTRE 13E
AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ — APPAREILS ÉLECTRONIQUES INTERDITS

Exercice 1 (Options asiatiques, 8 pts). On considère un marché financier avec un actif sans risque, dont le taux d'intérêt est constant et égal à r et un actif risqué de dynamique

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt.$$

Les paramètres μ et σ sont constants. L'objectif de cet exercice est de calculer le prix et établir la stratégie de couverture d'une option asiatique de pay-off

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)^+$$

où K est une constante.

1. Donner la dynamique de S sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que le processus
$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K)^+|\mathcal{F}_t]$$
est une $\mathbb{Q}$-martingale.
3. Montrer que, si l'on pose $\zeta_t = S_t^{-1}(K - \frac{1}{T}\int_0^t S_u du)$, on a
$$M_t = S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - \zeta_t)^+|\mathcal{F}_t].$$
Donner la dynamique de ζ sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$.
4. Soit $\phi(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x)^+]$. Montrer que
$$\phi(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x)^+|\mathcal{F}_t]$$
et que $M_t = S_t\phi(t,\zeta_t)$.
5. Ecrire la formule d'Itô pour M (on suppose que ϕ est suffisamment régulière). En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par ϕ.
6. Soit $\widetilde{M_t} = e^{-r(T-t)}M_t$. En appliquant la formule d'Itô, montrer que $\widetilde{M_t}$ est la valeur d'un portefeuille autofinançant répliquant le pay-off de l'option asiatique. En déduire la stratégie de couverture pour cette option.

Exercice 2 (Optimisation de portefeuille, 8 pts). On considère un marché financier avec un actif sans risque, dont le taux d'intérêt est constant et égal à r et un actif risqué de dynamique

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t(\lambda dt + dW_t).$$

Les paramètres σ et λ sont constants.

1. Ecrire la dynamique d'un portefeuille autofinançant, de valeur initiale x, dont la *proportion* ω_t est investie en l'actif risqué à toute date t. La valeur de ce portefeuille à l'instant t sera notée X_t^ω.

On considère un agent économique dont la fonction d'utilité est $U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$ pour $\gamma \in (0, 1)$. Cet agent cherche à résoudre le problème d'optimisation de portefeuille suivant.

$$\max_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T^\omega)],$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des stratégies admissibles, c'est-à-dire telles que le portefeuille est bien défini et reste strictement positif à toute date (c'est-à-dire, $X_t^\omega > 0\ \forall t \in [0, T]$ p.s.).

2. Soit Z_T la densité de la probabilité risque-neutre. Donner la forme explicite de Z_T puis montrer que tout portefeuille admissible vérifie
$$\mathbb{E}[e^{-rT} Z_T X_T^\omega] \leq x.$$

3. Introduisons la transformée de Fenchel de la fonction U:
$$V(y) = \sup_x \{U(x) - xy\}.$$
En utilisant question 2, montrer que pour toute stratégie admissible ω et pour tout $y \geq 0$,
$$E[U(X_T^\omega)] \leq E[V(ye^{-rT} Z_T)] + xy.$$

4. Soit
$$X_T^* = xe^{rT} \exp\left(\frac{\lambda W_T}{1-\gamma} + \frac{1-2\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{\lambda^2 T}{2}\right).$$
Calculer la stratégie ω^* telle que $X_T^* = X_T^{\omega^*}$.

5. Montrer que la transformée de Fenchel de la fonction d'utilité puissance $U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$ est donnée par $V(y) = \frac{1-\gamma}{\gamma} y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Montrer qu'il existe $y^* \geq 0$ tel que
$$E[U(X_T^*)] = E[V(y^* e^{-rT} Z_T)] + xy^*.$$
Conclure.

Exercice 3 (Cotation en delta, 6pts). Dans certains marchés (e.g., le marché de change) les options ne sont pas cotées en fonction de leur strike, mais en fonction de leur delta. Par exemple, une option à la monnaie est définie comme l'option ayant un delta de $\frac{1}{2}$ (pour le call) ou $-\frac{1}{2}$ (pour le put) etc. Dans cet exercice, on suppose que le sous-jacent S de valeur initiale S_0 suit le modèle de Black-Scholes standard de volatilité σ et que le taux d'intérêt est constant et égal à r. On se place à la date $t = 0$.

1. Rappelez la formule pour le delta Black-Scholes. Calculez le strike de l'option d'échéance T dont le delta est égal à $\frac{1}{2}$.

2. On appelle le x-delta risk reversal (où x est égal, par exemple, à 0.25 ou à 0.1) une combinaison d'une option call dont le delta est égal à x et une position courte en une option put dont le delta est égal à $-x$. La maturité des deux options est la même et égale à T. Calculez les strikes des options call et put dans un x-delta risk reversal (en fonction de la valeur de x).

3. Montrez qu'un x-delta risk reversal est vega-neutre.

4. Un x-delta *vega-weighted butterfly* consiste à acheter un call dont le delta est égal à x, un put dont le delta est égal à $-x$, et à vendre w calls et w puts à la monnaie (voir ci-dessus), pour que le vega du produit soit nul. Calculer le nombre w de calls / puts à la monnaie à acheter.