Master Modélisation Aléatoire 2ème année
Examen partiel de Processus Stochastiques en Finance
18 novembre 2016, 14h–17h, salles 0011+2017
Aucun document autorisé — Appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Option asiatique, 6pt). On se place dans le cadre du modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où r est le taux sans risque du cash, et W est un mouvement Brownien standard sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$. On s'intéresse à l'option asiatique de payoff en T

$$H_T = \Big(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\Big)_+.$$

1. Justifier brièvement que le prix en t de cette option est donné par

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[e^{-r(T-t)}\Big(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\Big)_+\Big|\mathcal{F}_t\Big]$$

2. (a) On pose $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ le prix actualisé. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[(\tilde{S}_t - Ke^{-rT})_+\Big] \le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[e^{-rT}(S_T - K)_+\Big], \quad 0 \le t \le T. \tag{1}$$

   (b) En intégrant entre $t = 0$ et $t = T$ chacun des deux termes de (1) et en appliquant encore une fois l'inégalité de Jensen, en déduire que

$$V_0 \le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[e^{-rT}(S_T - K)_+\Big],$$

   c'est à dire que le prix de l'option asiatique est plus petit que celui du call européen.

3. On pose

$$\hat{V}_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[e^{-rT}\Big(\exp\big(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t dt\big) - K\Big)_+\Big].$$

   (a) En appliquant convenablement l'inégalité de Jensen, montrer que $V_0 \ge \hat{V}_0$.

   (b) Montrer que la variable aléatoire $I_T = \int_0^T W_t dt$ est une gaussienne centrée de variance $T^3/3$ sous $\mathbb{Q}$.

   (c) En déduire que

$$\hat{V}_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[\Big(S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2} + \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}U\Big) - K\Big)_+\Big],$$

   où U est une gaussienne centrée réduite sous $\mathbb{Q}$.

   (d) Expliciter $\hat{V}_0$ en fonction de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exercice 2 (Optimisation de portefeuille, 6+2 pt). On se place dans le modèle d'un marché financier avec m actifs risqués de dynamique

$$dS^i(t) = S^i(t)\left[b_i dt + \sum_{\nu=1}^d \sigma_{i\nu} dW_\nu(t)\right], \quad S^i(0) = s_i > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

où $(W^1, \dots, W^d)$ est un mouvement brownien standard d-dimensionnel et b_i et $\sigma_{i\nu}$ sont des coefficients constants. Dans la suite on note par $(a_{ij})_{i,j=1}^m$ la matrice dont les éléments sont

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^d \sigma_{i\nu}\sigma_{j\nu}.$$

Cette matrice est supposée *définie positive.*

1. En utilisant la formule d'Itô, montrer que la dynamique des actifs risqués s'écrit

$$d\left(\log S^i(t)\right) = \gamma_i dt + \sum_{\nu=1}^{d} \sigma_{i\nu} dW_\nu(t),$$

   où $(\gamma_i)_{i=1}^m$ sont des coefficients à déterminer. On appellera ces coefficients les taux de croissance des actifs. Calculer la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log S^i(T),$$

   et justifier le terme "taux de croissance".

Dans cet exercice, on appellera *stratégie de portefeuille* un vecteur $(\pi_1, \ldots, \pi_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1$. La quantité π_i représente la proportion de la richesse investie dans le i-ième actif, qui est supposée constante.

2. Montrer que la dynamique de la richesse correspondant à la stratégie de portefeuille π et à la valeur initiale w est donnée par

$$\frac{dV^{w,\pi}(t)}{V^{w,\pi}(t)} = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \frac{dS^i(t)}{S^i(t)}.$$

   et qu'elle s'écrit également as

$$d\left(\log V^{w,\pi}(t)\right) = \gamma^\pi dt + \sum_{\nu=1}^{d} \sigma_\nu^\pi dW_\nu(t),$$

   où σ_ν^π et γ^π sont les coefficients à déterminer.

3. Calculer la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log V^{w,\pi}(T).$$

   En utilisant la méthode de multiplicateurs de Lagrange, calculer la composition du portefeuille qui maximise cette limite (parmi toutes les stratégies constantes sous contrainte que la somme des poids est égale à 1). Le portefeuille correspondant à cette stratégie s'appelle le portefeuille de croissance optimale. Montrer que le portefeuille de croissance optimale maximise également l'utilité logarithmique

$$\mathbb{E}[\log V^{w,\pi}(T)],$$

   pour chaque T.

4. On cherche maintenant un portefeuille qui maximise la probabilité d'atteindre un niveau L avant de tomber au-dessous d'un 'plancher' F, pour $F < w < L$.

   (a) Montrer que pour toute stratégie de portefeuille π il existe $\alpha^\pi \in \mathbb{R}$ tel que le processus $(V^{w,\pi}(t))^{\alpha^\pi}$ est une martingale.

   (b) Soit $\tau^x = \inf\{t \geq 0 : V^{w,\pi}(t) = x\}$. En utilisant le théorème d'arrêt avec le temps d'arrêt $\tau^L \wedge \tau^F$, calculer la probabilité

$$\mathbb{P}[\tau^L > \tau^F]$$

   en fonction de α^π.

   (c) Montrer que maximiser la probabilité $\mathbb{P}[\tau^L > \tau^F]$ est équivalent à minimiser α^π.

   (d) **(Question bonus, difficile)** Calculer la composition du portefeuille qui maximise $\mathbb{P}[\tau^L > \tau^F]$.

Exercice 3 (Volatilité implicite, 8pt). On considère un marché financier constitué d'un actif risqué dont le prix à la date t est noté par S_t et d'un actif sans risque. Le *taux d'intérêt est supposé nul* et on admet que les prix de tous les actifs contingents peuvent être calculés comme espérances de leurs pay-offs sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, sous laquelle le processus S est une *martingale*. Nous supposons également que le processus S est p.s. continu, et que pour chaque $T > 0$ et $K \geq 0$, $\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T = K] = 0$.

Soit $k = \log \frac{K}{S_0}$ le log strike d'une option Call européenne. On dénote par $c(k,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - S_0 e^k)^+]$ le prix de cette option, par

$$c^{BS}(k,T,\sigma) = S_0 N\left(\frac{-k+\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right) - S_0 e^k N\left(\frac{-k-\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

son prix Black-Scholes si la volatilité est égale à σ, et par $I(k,T)$ sa volatilité implicite, c'est-à-dire, l'unique solution de

$$c^{BS}(k,T,I(k,T)) = c(k,T). \tag{2}$$

Dans cet exercice, on s'intéresse au comportement de la volatilité implicite et sa dérivée par rapport à k (le *skew*) lorsque $T \to 0$ et $k = 0$.

1. (a) Montrer que $c(0,T) \to 0$ lorsque $T \to 0$.

   (b) En déduire, en utilisant l'équation (2), que $I(0,T)\sqrt{T} \to 0$ lorsque $T \to 0$, et que

   $$I(0,T) \sim \frac{c(0,T)}{S_0}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}, \quad T \to 0,$$

   où le symbole $\sim$ signifie que le ratio des deux quantités tend vers 1.

2. (a) Exprimer $\frac{\partial c(k,T)}{\partial k}$ en fonction de la probabilité d'exercice de l'option.

   (b) En utilisant (2) et le résultat de la question précédente, exprimer le skew de volatilité implicite $\frac{\partial I(k,T)}{\partial k}$.

   (c) Montrer que, lorsque $k = 0$, le skew de volatilité implicite vérifie

   $$\frac{\partial I(0,T)}{\partial k} = \frac{N\left(-\frac{I(0,T)\sqrt{T}}{2}\right) - \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T \geq S_0]}{n\left(-\frac{I(0,T)\sqrt{T}}{2}\right)\sqrt{T}},$$

   où n est la densité de la loi normale centrée réduite.

   (d) En déduire que si $I(0,T)$ est borné au voisinage de $T = 0$ alors

   $$\frac{\partial I(0,T)}{\partial k} = -\frac{I(0,T)}{2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}}\left\{\frac{1}{2} - \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T \geq S_0]\right\} + O(T).$$

3. On suppose maintenant que le processus S suit la dynamique "lognormale shiftée":

   $$dS_t = (S_t - \beta)\sigma dW_t,$$

   où $\beta < S_0$ et W est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$

   (a) Donner la forme explicite de S_t.

   (b) En utilisant le résultat de la question 1b ci-dessus, calculer $\lim_{T\to 0} I(0,T)$.

   (c) Calculer $\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[S_T \geq S_0]$.

   (d) En utilisant la question (2c) ci-dessus, calculer le *skew à la monnaie* $\frac{\partial I(0,T)}{\partial k}$ ainsi que sa limite lorsque $T \to 0$.