

# Mathématiques financières

Peter Tankov

Master M2MO

Edition 2015-2016



# Préface

## Objectifs du cours

L'objet de ce cours est la modélisation financière en temps continu. L'objectif est d'un côté de comprendre les bases de la théorie d'options et d'un autre côté d'acquérir les premières notions de la gestion des risques financiers.

La notion centrale du cours est l'absence d'arbitrage. Un arbitrage est une stratégie d'investissement à coût initial nul, qui a un pay-off positif ou nul à une date future quel que soit le scénario d'évolution du marché, et un pay-off strictement positif dans certains scénarios. Elle permet ainsi, avec probabilité positive, de réaliser un gain sans investissement initial et sans risque.

L'absence d'arbitrage permet de définir le "juste prix" d'un actif comme le prix qui ne conduit pas à une opportunité d'arbitrage. Pour certains actifs le calcul de ce prix de non-arbitrage ne nécessite pas de faire appel à un modèle, pour d'autres on sera obligé de faire des hypothèses sur la dynamique des actifs. Par exemple, la célèbre formule de Black et Scholes pour les prix des options Call et Put suppose que le cours de l'actif sous-jacent peut être décrit par un mouvement brownien géométrique. De même, pour certains actifs et dans certains modèles l'hypothèse d'absence d'arbitrage permet de déterminer l'unique prix ; dans d'autres situations on obtiendra un intervalle non-vide des prix, qui sont tous compatibles avec l'absence d'arbitrage.

Une autre notion centrale est celle de couverture. La couverture est l'utilisation d'une stratégie de trading dans des actifs liquides afin de minimiser ou annuler le risque d'une position financière (a priori, la vente d'une option). Si le prix de vente n'est pas dans l'intervalle des prix compatibles avec l'absence d'arbitrage (par exemple, si la banque a réussi à vendre l'option à un prix plus élevé que le juste prix), alors la couverture permet d'exploiter l'opportunité d'arbitrage et de réaliser un gain sans risque.

## Organisation du polycopié

Ce polycopié contient sept chapitres ; au début de chaque chapitre, en italique, vous trouverez la liste des notions clés du chapitre. La plupart de ces concepts sont encadrés ou mises en évidence d'une autre manière dans le texte des chapitres.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Les acteurs du monde des produits dérivés . . . . .	8
1.1.1	Fonctionnement et structure d'une banque d'investissement . . . . .	9
1.1.2	La régulation bancaire . . . . .	9
1.2	Quantification du risque et mathématiques . . . . .	11
1.3	La crise financière de 2007-2008 . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Les produits dérivés</b>	<b>23</b>
2.1	Forwards et futures . . . . .	23
2.1.1	Equivalence des prix de forwards / futures . . . . .	24
2.1.2	Valorisation des forwards par non-arbitrage . . . . .	26
2.2	Introduction aux options . . . . .	27
2.2.1	Propriétés des prix de calls/puts . . . . .	30
2.2.2	Option américaines . . . . .	32
2.3	Principes de valorisation d'options . . . . .	32
<b>3</b>	<b>La formule de Black et Scholes</b>	<b>35</b>
3.1	Mouvement brownien géométrique . . . . .	35
3.2	Dynamique d'un portefeuille autofinçant . . . . .	36
3.3	Construction du portefeuille de réplication . . . . .	38
3.4	La formule de Black et Scholes . . . . .	40
3.5	Les grecques . . . . .	42
3.6	Discrétisation et couverture en gamma . . . . .	43
3.7	Couverture en présence de coûts de transaction . . . . .	45
3.8	Robustesse de la formule de Black et Scholes . . . . .	46
3.9	Volatilité implicite . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Volatilité locale et la formule de Dupire</b>	<b>51</b>
4.1	Modèles à volatilité locale . . . . .	51
4.2	Modèle CEV . . . . .	52
4.3	Valorisation d'options dans les modèles à volatilité locale . . . . .	54
4.4	Equation et formule de Dupire . . . . .	56
4.5	Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale . . . . .	59
4.6	Calibration de la volatilité locale . . . . .	61
4.6.1	Interpolation de la volatilité implicite . . . . .	61

4.6.2	Conditions d'absence d'arbitrage . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Valorisation d'options exotiques</b>	<b>65</b>
5.1	Evaluation risque-neutre . . . . .	65
5.2	Changement de numéraire . . . . .	72
5.3	Options à barrière et réplication statique . . . . .	78
5.4	Swaps de variance . . . . .	82
5.5	Finance model-free et valorisation robuste des options à barrière . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Introduction aux modèles de la courbe de taux</b>	<b>87</b>
6.1	Fixed income terminology . . . . .	88
6.1.1	Zero-coupon bonds . . . . .	88
6.1.2	Yields from zero-coupon bonds . . . . .	89
6.1.3	Forward Interest Rates . . . . .	90
6.1.4	Instantaneous interest rates . . . . .	91
6.2	The Vasicek model . . . . .	92
6.2.1	Zero-coupon bonds prices . . . . .	93
6.2.2	Calibration to the spot yield curve and the generalized Vasicek model . . . . .	94
6.3	Introduction to the Heath-Jarrow-Morton modeling approach . . . . .	95
6.3.1	Dynamics of the forward rates curve . . . . .	95
6.3.2	The Heath-Jarrow-Morton drift condition . . . . .	96
6.3.3	The Ho-Lee model . . . . .	98
6.3.4	The Hull-White model . . . . .	98
6.4	The forward neutral measure . . . . .	99
6.5	Derivatives pricing under stochastic interest rates . . . . .	100
6.5.1	European options on zero-coupon bonds . . . . .	100
6.5.2	The Black-Scholes formula under stochastic interest rates . . . . .	101
6.6	Interest rate markets and derivatives . . . . .	102
6.6.1	Libor rates . . . . .	102
6.6.2	Interest rates swaps . . . . .	103
6.6.3	Caps and floors . . . . .	104
6.6.4	Swaptions . . . . .	106
6.7	Libor market model for interest rates . . . . .	107
6.7.1	Parameterization and calibration of the Libor market model . . . . .	111
6.8	Evolutions in interest rate models and markets after the subprime crisis . . . . .	111
6.8.1	The Multicurve framework for pricing interest rate derivatives . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Introduction aux modèles du risque de crédit et de contrepartie</b>	<b>119</b>
7.1	Modélisation du risque de crédit . . . . .	119
7.1.1	Modèles structurels . . . . .	120
7.1.2	Modèles à forme réduite (à intensité) . . . . .	120
7.2	Ajustement pour le risque de contrepartie (CVA/DVA) . . . . .	124
7.2.1	Méthodes de réduction du risque de contrepartie . . . . .	124
7.2.2	Une brève introduction à la CVA . . . . .	125
7.3	Coût du financement . . . . .	128

# Chapitre 1

## Introduction

- *Les produits dérivés de base : les contrats à terme, les options.*
- *Les acheteurs et les vendeurs des produits dérivés ; structure d'une banque d'investissement.*
- *Rôle des modèles in finance.*
- *Les MBS et les CDO.*
- *Les agences de rating.*
- *Le déroulement et les principales causes de la crise des subprimes.*

Un produit dérivé est un produit dont les flux de paiement dépendent de la valeur d'un indice financier (indice de marché, taux d'intérêt, prix d'un actif) ou d'un événement du marché (défaut d'une entreprise). Les produits dérivés le plus simples sont les *contrats à terme* (forwards) permettant de fixer aujourd'hui le prix d'une transaction qui aura lieu à une date future. Les *swaps* permettent d'échanger une série de flux financiers (par exemple, suite de paiements en euros contre une suite de paiements en dollars). Les *options* sont des contrats non-linéaires qui offrent une plus grande liberté à l'acheteur, par exemple, l'option d'achat sur un actif financier donne le droit mais non l'obligation d'acheter cet actif à une date future.

La principale raison d'existence des produits dérivés est le transfert des risques financiers entre les investisseurs, ou plus généralement entre les agents économiques. Un produit dérivé peut être acheté pour des raisons de couverture des risques futurs, de spéculation (par exemple, prendre le risque en faisant un pari sur la montée ou la baisse du cours d'une valeur financière) ou bien d'arbitrage (profiter d'un déséquilibre de marché sans prendre de risque). Par exemple, un industriel peut se protéger contre les fluctuations des prix des matières premières avec un contrat à terme. Un fonds d'investissement peut avoir recours aux options soit pour éviter des pertes trop grandes, soit au contraire dans le cadre d'une stratégie de gestion agressive. Une entreprise cotée en bourse peut fidéliser ses employés en versant une partie de leur rémunération sous forme de stock options, et en les faisant ainsi participer aux risques liés à son fonctionnement.

Les risques financiers sont les risques associés aux fluctuations des cours des actifs financiers ou physiques, des taux d'intérêt ou des taux de change (risque de marché), ou plus généralement aux transactions financières : non-remboursement d'une dette (risque de défaut ou risque de contrepartie), impossibilité de vendre un actif ou de se financer sur le marché (risque de liquidité). Les

Catégorie	Taille du marché (md\$)
Taux de change	66,645
Taux d'intérêt	494,017
Actions / indices	6,313
Matières premières	2,993
Dérivés de crédit	26,930

TABLE 1.1 – Tailles de marché de différentes catégories de produits dérivés en décembre 2012. Source : Bank of International Settlements.

produits dérivés portent généralement sur le risque du marché ou le risque de crédit. Ils peuvent eux-même être négociés sur un marché organisé (ce qui est le cas surtout pour les options sur action/indice) ou bien vendus gré à gré par des grandes banques (par exemple, les options de change ou de taux d'intérêt). Le tableau 1.1 donne les tailles des marchés de différentes catégories de produits dérivés en décembre 2012. Pour les dérivés de crédit, le chiffre est à comparer avec 58,243 milliards en décembre 2007, au début de la crise financière.

## 1.1 Les acteurs du monde des produits dérivés

Les contrats à terme (futures) sont souvent négociés sur des marchés organisés. Initialement développés pour permettre aux agriculteurs de couvrir le risque associé à une production incertaine, à partir des années 1970 ces marchés étendent leur offre aux futures financières (taux d'intérêt / taux de change / action). Les swaps sont dans la plupart de cas négociés gré à gré, et dans le cas d'options il existent des marchés pour les contrats les plus simples (options vanille) mais les contrats exotiques sont vendus gré à gré.

Les options sont souvent vendues par banques d'investissement dans leur activité de *market making*. Elles peuvent être achetées par des institutions financières telles que les fonds de gestion alternative ou les banques elles-même (à des fins de spéculation ou d'arbitrage), ou bien par des entreprises et même des collectivités, pour optimiser la gestion de trésorerie.

La conclusion d'un contrat à terme ou plus généralement d'un contrat dérivé crée des obligations qui peuvent être difficiles à honorer pour les signataires du contrat en cas d'une évolution de situation de marché, ce qui conduit à un *risque de contrepartie* important. Par exemple, le vendeur d'une option d'achat peut ne pas être en mesure de livrer l'actif sous-jacent à la date d'échéance en cas d'une forte augmentation des prix du marché. Cette situation a conduit au développement des marchés organisés des produits dérivés. Les marchés améliorent la liquidité en standardisant les contrats et en permettant de trouver un acheteur / vendeur plus facilement. Ce qui est peut-être plus important, les marchés organisés éliminent le risque de contrepartie, car la *chambre de compensation* sert d'une contrepartie unique à toutes les transactions réalisées sur le marché.

Les produits dérivés sont des instruments complexes, dont les risques et les méthodes de valorisation ne sont pas toujours bien compris par tous les utilisateurs. En vue de la taille très importante du marché, une mauvaise gestion des risques des produits dérivés peut constituer une menace systémique pour l'économie mondiale, comme cela a été mis en évidence par la crise de 2007–2008. Pour cette raison, un rôle très important est joué par les régulateurs, qui contrôlent les méthodologies de gestion de risques utilisées par les banques et s'assurent que le capital détenu par les banques est suffisant pour assurer leur solvabilité dans des scénarios défavorables du marché.



### 1.1.1 Fonctionnement et structure d'une banque d'investissement

Une banque d'investissement (BFI) est une institution financière dont les principaux domaines d'activité sont le conseil et l'intermédiation dans les activités tels que les introductions en bourse, les fusions/acquisitions/émissions de dette et le trading pour compte propre ou pour compte de ses clients. En France, les BFI sont en général des filiales des grandes banques (SGCIB, CACIB) ; aux Etats-Unis le Glass-Steagall act de 1933 mandatait la séparation entre les banques d'investissement et les banques de détail. Il a été abrogé en 1999 mais en 2010, la Volcker Rule a interdit le trading pour compte propre pour les banques américaines (tout en permettant certaines exceptions, comme par exemple le market making).

Une banque d'investissement est en général structurée en trois parties : le front office regroupe les activités génératrices de revenu telles que les activités de conseil / intermédiation, le trading, le structuring / sales et la recherche (aussi bien la recherche 'equity' que la recherche quantitative sur les produits dérivés). Le middle office c'est la gestion de la trésorerie, l'enregistrement des transactions, le reporting etc. Le back office regroupe les départements de gestion des risques, validation de modèle et divers fonctions de support (la division entre le middle office et le back office est parfois assez floue). On trouve des équipes de quants aussi bien en front office (ils travaillent alors en lien direct avec trading / structuring) que dans les équipes de gestion de risque / validation de modèle.

**Bilan d'une banque d'investissement** LE tableau 1.2 montre un bilan stylisé d'une banque d'investissement. La partie actif regroupe essentiellement les créances de la banque (banking book) ainsi que les actifs que la banque possède dans le cadre de son activité de trading (trading book). La partie passif regroupe essentiellement la dette de la banque : les dépôts des clients et les émissions d'obligations. Les fonds propres sont calculés comme la différence entre la valeur des actifs de la banque et sa dette. Pour assurer sa solvabilité, la banque doit avoir une quantité suffisante de fonds propres pour compenser une chute éventuelle de la valeur de ses actifs.

**Utilisation des modèles dans une banque d'investissement** Les modèles mathématiques sont utilisés par les traders et les gestionnaires de risque à des fins différentes :

- Couverture des produits dérivés : par exemple, un trader qui fait un pari sur la volatilité en utilisant une option couverte en delta a besoin d'un modèle pour calculer le ratio de couverture.
- Valorisation des actifs illiquides : les options exotiques dans le portefeuille de la banque, pour lesquels il n'y a pas de prix de marché, sont valorisés à l'aide d'un modèle pour déterminer le capital de la banque.
- Gestion des risques : les modèles sont utilisés pour valoriser le portefeuille de la banque dans des scénarios de stress afin de calculer les mesures de risques et évaluer le capital réglementaire.

### 1.1.2 La régulation bancaire

Le fonctionnement d'une banque donne lieu naturellement à des conflits d'intérêt. Alors que les clients sont avant tout intéressés par la solvabilité et la solidité de la banque, le management et les traders peuvent être incités à prendre plus de risque pour maximiser leur rémunération en cas de gain. Les gains donnent lieu à des bonus importants alors que les pertes sont supportés par les actionnaires, ou même par le pouvoir publique qui peut intervenir dans les situations extrêmes et

Assets (actif)		Liabilities (passif)	
Cash and central bank balance	10M	Customer deposits	80M
Securities :		Bond issues :	
- bonds	20M	- senior bond issues	25M
- stocks	20M	- subordinated bond issues	15M
- derivatives	10M	Short-term borrowing	30M
Loans and mortgages :		Reserves (for losses on loans)	20M
- corporates	30M		
- retail	40M	Debt (sum of the above)	170M
- government	30M		
Other assets		Equity (fonds propres)	30M
- property	10M		
- investment in companies	10M		
Short-term lending	20M		
Total	200M	Total	200M

TABLE 1.2 – Exemple stylisée du bilan d’une banque d’investissement. Source : McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015). Quantitative risk management : Concepts, techniques and tools. Princeton university press.

renflouer la banque afin de sauvegarder la stabilité économique. La présence de ces conflits d’intérêt ainsi que l’importance des banques pour l’ensemble de l’économie rend nécessaire la régulation bancaire, dont le principal objectif est d’assurer la solvabilité de la banque. En Europe, les tâches de régulation bancaire sont partagés entre la BCE et les régulateurs nationaux (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution en France). Les principes de la régulation bancaire sont développés dans les Accords de Bâle, qui sont progressivement mis en oeuvre par les régulateurs nationaux. Les régulateurs surveillent et imposent des limites sur un certain nombre de ratios réglementaires, dont le plus important est le ratio de capital. La recommandation des accords de Bâle est d’avoir un ratio de capital d’au moins 8%.

$$\text{Capital ratio} := \frac{\text{Capital}}{\text{Risk-weighted assets}} \geq 8\%$$

Pour évaluer le capital de la banque, la valeur du marché de ses actifs doit être estimée (marked to market), ce qui peut constituer un véritable problème pour certains produits dérivés peu liquides.

### Les accords de Bâle

- Le premier accord de Bâle (1988) est centré sur le *banking book*. Il donne la définition du capital :

$$\text{Capital} \approx \text{Equity (Tier 1)} + \text{Reserves (Tier 2)}$$

et introduit des pondérations simples pour les classes d’actifs dans le calcul de *risk-weighted assets* :

Liquidités, dépôts à la BCE et obligations souveraines	Prêts immobiliers	Autres actifs : obligations d’entreprises etc.
0%	50%	100%

- Le *Market risk amendment* de 1996 introduit une méthode spécifique de calcul du capital pour le risque de marché (trading book). Ce document introduit une distinction importante entre *l'approche standardisé* et *l'approche de modèles internes*. Pour les banques utilisant un modèle interne, la charge en capital est déterminé, en gros, par la *Value at Risk* à 99% (mesure de risque qui est définie comme la quantile de la distribution de perte pour un horizon donné) calculé pour un horizon de 10 jours.
- Le deuxième accord de Bâle (2005) précise les règles de calcul des indicateurs de risque et étend la possibilité d'utiliser les modèles internes au banking book.
- Le troisième accord de Bâle (2011) adopté à la suite de la crise de 2007-2008 renforce les contraintes en capital et en liquidité.
- Le Fundamental review of trading book (2016) modifie les règles de calcul des mesures de risque et introduit notamment l'utilisation de *Expected Shortfall*.

## 1.2 Quantification du risque et mathématiques

Les valeurs des produits dérivés dépendent des prix futurs des actifs sous-jacents, et ces prix futurs sont incertains. Il est donc naturel d'essayer de quantifier cette incertitude avec un modèle mathématique, plus précisément avec un modèle probabiliste. Pour donner un exemple, graphique 1.1 compare l'évolution du prix de la société Apple pendant une période de 10 ans avec une trajectoire du mouvement brownien géométrique, dont les paramètres ont été choisis pour que les deux trajectoires se ressemblent au plus près. Il est clair que les deux graphiques sont presque indistinguables à l'oeil nu. De même l'histogramme des rendements journaliers sur la même période est très proche de la loi gaussienne. Cela signifie que le modèle du mouvement brownien géométrique fournit une description assez précise du comportement des prix d'Apple à fréquence journalière, et que donc ce modèle peut apporter des renseignements sur les prix des produits dérivés sur cet actif. Effectivement, le modèle de Black-Scholes, fondé sur l'hypothèse du mouvement brownien géométrique, a eu un énorme succès sur le marché d'options.

Cependant, la modélisation financière est fondamentalement différente de la modélisation en sciences naturelles. En physique on a affaire à des lois de la nature, qui ne changent pas, alors qu'en finance on essaie de modéliser les prix des actifs, qui résultent du comportement et des perceptions des agents du marché, qui peuvent changer en fonction de la situation économique ou même en fonction des modèles utilisés (car les modèles affectent les prix du marché). Il faut donc être extrêmement prudent avec les modèles financiers, surtout ceux qui tentent de faire des prévisions ou des analyses à long terme. Tout modèle en finance est fondamentalement faux dans le sens qu'à coté des risques 'quantifiables' il existent toujours des incertitudes auxquelles on ne peut pas raisonnablement associer une probabilité. En gestion de risques financières, les outils probabilistes comme la Value at Risk qui apportent une vision du risque dans les conditions 'normales' du marché sont toujours complétés par une analyse des scénarios de stress, qui cherche à identifier des scénarios de perte plausibles sans donner une probabilité précise de leur réalisation et de prendre des précautions pour éviter la faillite de la banque si ces scénarios se matérialisent.

Les modèles faits par des quants sont souvent utilisés par les personnes autres que ceux qui les ont développés. Par conséquent, les utilisateurs des modèles peuvent ne pas être au courant de tous les hypothèses / limitations, ou bien décider délibérément de ne pas les prendre en compte en raison par exemple de la pression de la concurrence (si tout le monde dans le marché fait des bénéfices en utilisant un faux modèle, il est difficile de ne pas faire pareil). Par conséquent, les utilisateurs

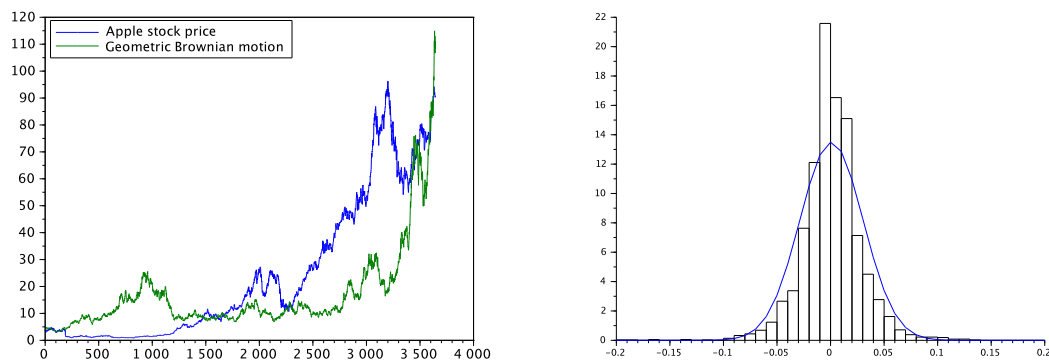


FIGURE 1.1 – Prix d’une action de la société Apple sur une période de 10 ans, comparé avec une trajectoire du mouvement brownien géométrique.

d’un modèle financier doivent toujours être informés, de manière aussi précise que possible, des hypothèses sous-jacentes du modèle et de son domaine de validité. Sur le sujet d’utilisation des modèles en finance, les lecteurs sont invités à consulter le livre d’Emmanuel Derman [Derman, 2011] ainsi que le ‘Financial Modeler’s Manifesto’ de P. Wilmott et E. Derman [Derman and Wilmott, 2009].

#### The Modelers’ Hippocratic Oath

(reproduit de Financial Modeler’s Manifesto de Wilmott et Derman)

- I will remember that I didn’t make the world, and it doesn’t satisfy my equations.
- Though I will use models boldly to estimate value, I will not be overly impressed by mathematics.
- I will never sacrifice reality for elegance without explaining why I have done so.
- Nor will I give the people who use my model false comfort about its accuracy. Instead, I will make explicit its assumptions and oversights.
- I understand that my work may have enormous effects on society and the economy, many of them beyond my comprehension.

### 1.3 La crise financière de 2007-2008

Rien n’illustre les dangers d’utilisation de modèles financiers hors de leur cadre d’applicabilité aussi bien que la crise financière de 2007–2008. Cette crise, qui a secoué l’économie mondiale et a provoqué des pertes massives de PIB dans quasiment tous les pays développés (voir graphique 1.2), a été largement provoquée par la croissance démesurée d’un type particulier de dérivés de crédit : celui des CDOs (Collateralized Debt Obligations), illustrée par le graphique 1.5, et par des défaillances majeures dans la compréhension et la gestion des risques associés.

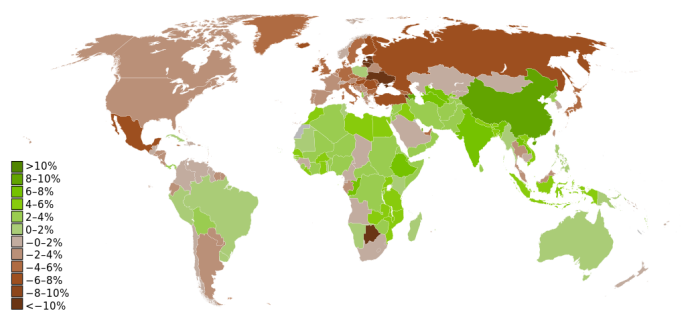


FIGURE 1.2 – Croissance de PIB en 2009. Source : Wikipedia ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GDP\\_Real\\_Growth.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GDP_Real_Growth.svg))

**Une bulle sans précédent : le marché des CDO** La baisse du taux directeur de la Fed suite à la bulle internet de 2000 ainsi que les politiques du gouvernement américain incitant les ménages à devenir propriétaires de leurs maisons, ont contribué à créer une bulle sur le marché immobilier (voir graphique 1.3). Pour répondre à la demande croissante des prêts immobiliers, les banques ont fait recours à une méthode appelée titrisation, ou transformation des créances en titres. Le principe de titrisation des prêts immobiliers consiste à les vendre à une société séparée créée pour l'occasion. Cette société émet des obligations, qui sont vendues aux investisseurs. Les investisseurs reçoivent des produits relativement liquides avec une rémunération attractive et les banques se débarrassent du risque, car les créances n'apparaissent plus dans leur bilan, et libèrent aussi du capital pour octroyer plus de prêts. Ces obligations adossées aux créances immobiliers s'appellent les MBS (mortgage-backed securities) ou CMO (collateralized mortgage obligations).

Ces obligations sont classées en plusieurs catégories ou tranches, qui déterminent l'ordre dans lequel elles sont affectées par les pertes du portefeuille de créances initial. La tranche dite senior est la moins rémunérée. Elle représente en général entre 80% et 90% du montant total et est la dernière à subir des pertes. Elle est donc moins risquée que les créances du portefeuille initial, car elle ne sera pas affectée par les pertes du portefeuille tant que toutes les autres tranches n'ont pas été détruites. La tranche suivante (mezzanine) est plus risquée car les détenteurs des obligations de cette tranche sont payés seulement une fois que la tranche senior a été remboursée. Elle offre donc une rémunération plus attractive. Finalement, la dernière tranche (equity) qui regroupe les actifs résiduels, porte le plus de risque et n'est plus vraiment considéré comme de la dette. Les tranches senior et mezzanine des MBS sont notés par les agences de rating, et avant la crise les tranches senior recevaient en général la notation la plus élevée AAA, qui correspond à un taux historique de défauts inférieur à 0.02% par an, car en raison de la diversification ils étaient considérées quasiment sans risque.

Alors que les tranches senior des MBS étaient faciles à vendre, les tranches plus risquées n'arrivaient pas à attirer les investisseurs malgré leur rémunération plus attractive. Pour palier à cette manque d'intérêt, une innovation importante apparaît : les CDO (collateralized debt obligations)<sup>1</sup>. Les CDO sont construits selon la même principe, seulement au lieu d'être adossées directement aux crédits résidentiels, ils sont adossées aux créances plus variés dont (dans la plupart des cas) des tranches risquées des MBS. Les tranches senior des CDO recevaient également une notation très

1. Dans les mots d'un banquier de l'époque, "les banques ont créé l'investisseur".

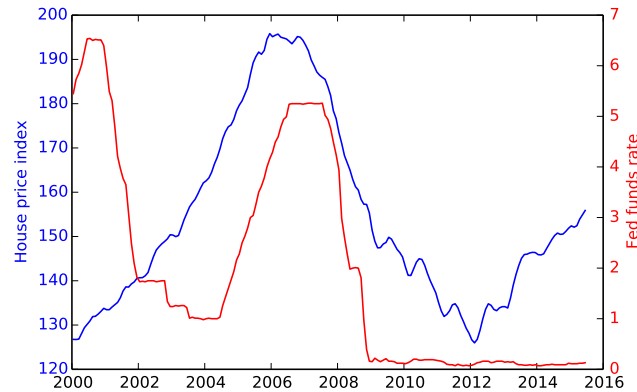


FIGURE 1.3 – Prix des maisons aux Etats-Unis (source de données : page web de Robert Shiller, l'indice est normalisé à 100 en 1890) et le taux directeur de la Fed (source de données : Federal Reserve).

élevée, et étaient vendues à des investisseurs, alors que les tranches mezzanine et equity était parfois repackagées en d'autres structures de même type, appelées CDO<sup>2</sup> (voir diagramme 1.4), dont les tranches senior étaient également très bien notées.

En raison de leur notation élevée et de leur rémunération attractive, les CDO étaient très demandées par les investisseurs, en particulier par certains fonds de pension qui légalement ne peuvent investir que dans les actifs notés AAA. Les banques qui structuraient les CDO ont également gardé une grande quantité de ces actifs dans le cadre de leur activité d'investissement pour compte propre. La demande des CDO a à son tour alimenté la demande des prêts immobiliers ce qui a conduit à une baisse des exigences pour un emprunteur potentiel, et à la prolifération des prêts à taux variable, sans apport initial, et plus généralement des prêts dits 'subprime', c'est-à-dire qui ont un risque élevé de non-remboursement. Comme les autres prêts, les prêts subprime ont été restructurés en CDO et recevaient une notation AAA, ce qui a conduit à la plus grande aberration de la crise : à partir d'un portefeuille des prêts de basse qualité, on fabriquait ainsi des obligations dont 90% étaient supposées quasiment sans risque.

**Le déroulement de la crise** Tant que les taux d'intérêt étaient bas et les prix des maisons continuaient à grimper, le système pouvait fonctionner, mais avec l'augmentation du taux directeur de la Fed en 2006 les emprunteurs à taux variable ne pouvaient plus rembourser leurs prêts et leurs logements étaient vendus aux enchères ; avec la saturation du marché en raison d'un grand nombre de maisons mises en construction, cela a provoqué d'abord un ralentissement et ensuite une chute brutale des prix sur le marché, ce qui a augmenté encore le taux de non-remboursement, car les acheteurs ne pouvaient plus refinancer leurs prêts.

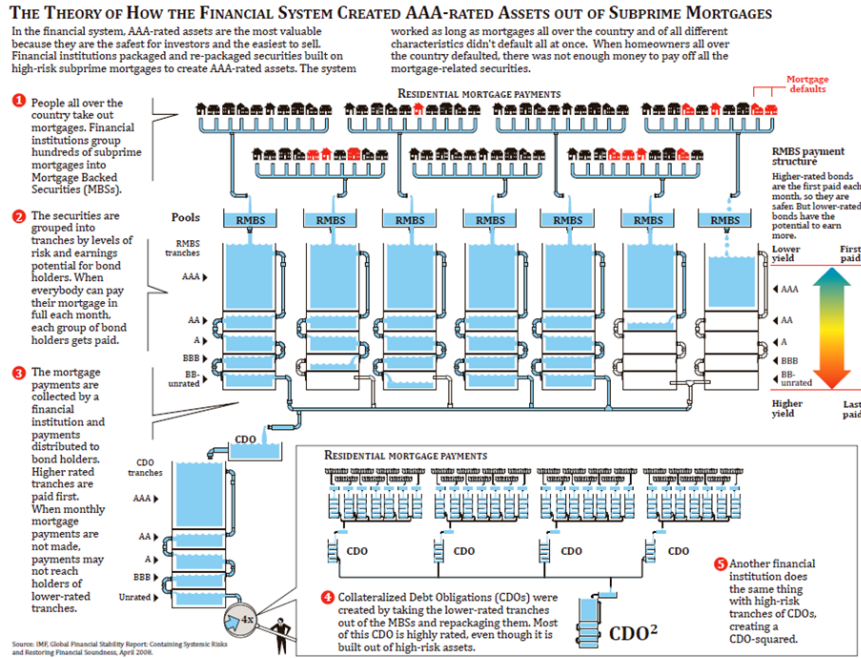


FIGURE 1.4 – Structure des flux financiers des MBS, CDO et CDO<sup>2</sup>. Source : Fonds Monétaire International.

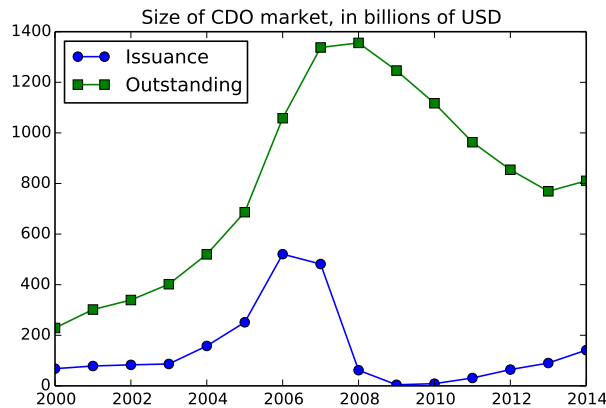


FIGURE 1.5 – Marché des CDO avant et après la crise des subprimes. Source de données : Bank of International Settlements.

**Notation de crédit et agences de rating**

La qualité de crédit d'un émetteur est mesurée par la notation de crédit (credit rating) : une évaluation de la solvabilité de l'émetteur calculée en interne par la banque ou par une agence de notation externe. Les notations de la dette souveraine, des corporations et des émissions de CDO sont calculées par les agences de rating internationales dont les plus connues sont Standard & Poor's, Moody's et Fitch ratings. Par exemple, l'échelle de notation de Standard and Poor's est AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, D, où AAA est la meilleure notation possible et D correspond au défaut. Ratings de AA à CCC peuvent être précisés en rajoutant un plus (+) ou un moins (-). Les obligations notées au minimum BBB- sont considérées adaptées aux investissements de long terme ('investment grade') alors que les autres sont considérées comme investissements spéculatifs. Les agences de notation présentent leurs ratings comme des simples 'opinions' alors qu'en réalité ils jouent un rôle très important dans la régulation bancaire : certains fonds monétaires ne peuvent investir que dans les obligations notées AAA, et dans le calcul du ratio de capital le rating détermine la pondération des actifs. Par exemple dans le cadre du Bâle II, un rating AAA correspond à une pondération de 0.6% et un rating de BBB correspond à une pondération de 4.6%. Ceci signifie qu'une banque qui a des actifs notés AAA dans son portefeuille devra détenir presque 8 fois moins de capital réglementaire qu'une banque dont les actifs sont notés BBB.

Les agences de notation constatent une augmentation du taux de non-remboursement et revoient la notation des MBS et CDO à la baisse. Cela se répercute immédiatement sur les valorisations des CDO dans le bilan des banques et des fonds d'investissement, car depuis 2006 les institutions financières sont obligées de comptabiliser leurs actifs à leur valeur de marché même si elles ne comptent pas les vendre dans l'immédiat. La première victime est la banque d'investissement américaine Bear Stearns, qui en juillet 2007 annonce des pertes sans précédent dans deux de ses fonds investis massivement en CDO. En août, BNP Paribas suspend temporairement les retraits de capital de trois de ces fonds investis en CDO. En octobre 2007 c'est le tour de Merrill Lynch qui annonce des pertes de 7.9 milliards de dollars liées à son activité de CDO. Le mouvement de panique déclenché par ces pertes a alors quasiment réduit à zéro la liquidité du marché des CDOs. En effet, les prix de ces "actifs toxiques" étant constamment révisés à la baisse, il devenait presque impossible de s'en débarrasser.

La crise de liquidité sur le marché des CDO déclenche alors une crise de confiance sur le marché interbancaire : il devient de plus en plus difficile pour les banques d'investissement de se financer au jour le jour. La première victime est encore Bear Stearns : pour éviter le pire, en mars 2008 la Fed négocie en urgence le rachat de cette banque par JP Morgan, en fournissant des garanties à hauteur de 30 milliards de dollars. Le sauvetage des actionnaires de Bear Stearns avec l'argent du contribuable met la Fed sous pression. En Angleterre, la banque Northern Rock est nationalisée au printemps 2008 après une ruée sur ces dépôts. La crise atteint son sommet en septembre 2008 avec la faillite de Lehman Brothers et le rachat en urgence de Merrill Lynch par Bank of America. Deux autres grandes banques d'investissement, Goldman Sachs et Morgan Stanley se reconvertissent en banques de détail pour avoir accès aux financements d'urgence de la Fed. Les sociétés de crédit immobilier Fanny Mae et Freddie Mac sont reprises par le gouvernement, et l'assureur AIG reçoit plus de 100 milliards du gouvernement fédéral. La banque Fortis est nationalisée en Belgique le 29 septembre. Pendant la semaine du 6 au 10 octobre 2008, plusieurs indices majeurs tels que le S&P 500 ou le CAC40 perdent plus de 20% de leur valeur. Finalement, en octobre 2008 une loi met en place un programme de sauvetage des banques sans précédent, à hauteur de 700 milliards de dollars.



**Défaillances dans la gestion des risques de CDO : trop de confiance aux modèles trop simples** La mauvaise évaluation et gestion du risque des CDOs, par les investisseurs, les banques et les agences de rating a donc joué un rôle primordial dans le déclenchement de la crise. Les CDOs sont des produits financiers extrêmement compliqués. En tenant compte des références à d'autres documents, le nombre de pages de la notice de certains de ces produits dépasse le million ! Dans ce contexte, la plupart des banques utilisaient des modèles trop simples pour rendre compte de la réalité complexe des défauts simultanés qui affectent le pay-off d'une CDO. Par exemple, le modèle de copule gaussienne de D. Li [Li, 2000, Salmon, 2009] réduit toute la complexité du problème à une unique valeur de corrélation. Les autres acheteurs des CDO faisaient confiance aux notations délivrées par les agences de rating à la demande des vendeurs. Après tout, pour attribuer un rating à une CDO, les agences de notation recevaient une commission pouvant atteindre 500,000 dollars par émission, on s'attendait donc qu'ils analysent en profondeur les risques de ces produits. Le problème est que même les agences de rating ne pouvaient vraiment appréhender la complexité des CDOs et étaient obligés de faire des simplifications importantes dans leur modélisation, qui se sont avérées désastreuses par la suite.

#### Le modèle de la copule gaussienne

La "copule gaussienne" est une méthode très simple pour construire la loi jointe de  $n$  variables aléatoires dont les lois marginales sont données. Soit  $F_1, \dots, F_n$  les lois marginales. On définit la fonction de répartition  $n$ -dimensionnelle par

$$F(x_1, \dots, x_n) := C_\rho(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)),$$

où

$$C_\rho(u_1, \dots, u_n) = \Phi_\rho(N^{-1}(u_1), \dots, N^{-1}(u_n)),$$

où  $N$  est la fonction de répartition de la loi gaussienne univariée et  $\Phi_\rho$  est la fonction de répartition d'un vecteur Gaussien en dimension  $n$  dont les composantes sont centrées réduites de corrélation constante égale à  $\rho$ . Le modèle de D. Li fait l'hypothèse que la dépendance entre les dates de défaut de  $n$  obligations entrant dans la composition d'une CDO est donnée par la copule gaussienne, autrement dit, la dépendance d'un portefeuille de défauts est la même que celle d'un vecteur gaussien de corrélation  $\rho$ . Le problème de cette approche est que quelle que soit la corrélation (du moment que  $|\rho| < 1$ ), la somme des éléments d'un vecteur gaussien obéit toujours la loi de grands nombres : pour  $n$  suffisamment grand le risque de défaut devient négligeable et sa composante systémique n'est pas pris en compte.

Le risque d'une CDO adossée à des MBS dépend des probabilités de non-remboursement des prêts individuels qui entrent dans la composition de la CDO via les MBS, et des corrélations entre les défauts individuels. Or, dans leurs modèles visant à analyser le risque de crédit des CDO les agences de rating ne descendaient jamais au niveau des emprunts individuels, ces modèles étaient fondés exclusivement sur les ratings attribués par les agences elles-mêmes aux tranches de MBS. Les ratings des MBS étaient calculés en utilisant les données d'une période historique assez courte puisque les MBS elles-mêmes n'existaient pas depuis très longtemps. S'ils tenaient compte des non-remboursements des emprunteurs individuels dus à des circonstances particulières, le risque systémique, lié à un renversement global du marché immobilier, a été largement sous estimé. Pour en tenir compte, il aurait fallu remonter jusqu'aux années 30 et la Grande Dépression, ce que personne n'a fait. De même, la corrélation entre les événements de défaut des différentes tranches de MBS composant une CDO n'était pas modélisée correctement en l'absence de données fiables. Par exemple, jusqu'en

juin 2005, l'agence Moody's n'avait pas de procédure systématique pour estimer la corrélation des tranches de MBS et utilisait des 'opinions d'expert' pour choisir les valeurs de corrélation [Commission, 2011, page 147]. En juin 2005, un tel modèle a été mis en place, mais il utilisait seulement 20 ans de données historiques ce qui correspond à une période de hausse des prix immobiliers, pendant laquelle les défauts étaient surtout dus à des circonstances individuelles et les corrélations étaient faibles.

On peut avancer plusieurs explications pour cette défaillance des agences de rating. D'un côté, malgré des bénéfices faramineux provenant de l'activité de notation des CDO (la seule agence Moody's a encaissé 887 millions de dollars pour les services de notation des produits structurés pendant la seule année 2006), les équipes quantitatives restaient relativement petites, surchargées et moins bien payées que les employés des banques d'investissement [Commission, 2011, page 149]. Par ailleurs, et cela est probablement plus important, il existait un important conflit d'intérêt puisque les agences de rating sont payées pour leurs services par les banques dont elles évaluent les produits. Même si les méthodologies plus prudentes étaient développées au sein des agences, ils tardaient à être appliquées par peur d'attribuer des ratings moins attractifs et voir un client important partir chez un concurrent moins scrupuleux.

Pour résumer, les notations attribuées aux CDO par les agences de rating ne reflétaient pas correctement le risque de ces produits en raison d'une sous-estimation grossière du risque systémique associé au retournement général du marché immobilier, à la fois pour le calcul des probabilités de défaut individuelles des tranches de MBS et dans le calcul de leur corrélation. Inutile d'ajouter que c'est exactement ce risque qui s'est matérialisé en 2006-2007 ; les agences de rating ont alors massivement dégradé les notations des CDO, ce qui a réduit quasiment à zéro la liquidité de ces instruments et a initié le mouvement de panique sur le marché interbancaire. Ce ne sont donc pas les modèles mathématiques qui sont responsables de la crise mais d'un côté leur utilisation hors de leur cadre d'applicabilité et sans une calibration adéquate par les agences de rating, et d'un autre côté une confiance aveugle et contraire à tout bon sens en ces modèles de la part des banques et des investisseurs.

**Les conséquences de la crise des subprimes** La crise des subprimes a eu des conséquences majeures sur le fonctionnement des marchés, la compréhension et la gestion des risques et les méthodes utilisées par les régulateurs. Tout d'abord, elle a mis en lumière les nouveaux types de risques, ou bien l'importance de ceux qui étaient connus mais non pris en compte par le marché.

- Le risque de liquidité dans ces aspects 'liquidité de financement' et 'liquidité du marché' fait maintenant l'objet des ajustements spécifiques des prix (funding valuation adjustment, FVA) et procédures de gestion de risque nouvelles dans le cadre de l'accord Bâle III.
- La reconnaissance du risque de défaut de grands établissements bancaires et des pays souverains développés, qui n'était quasiment pas pris en compte avant la crise, a profondément modifié le fonctionnement des marchés. Par exemple, le spread entre le taux EONIA (taux au jour le jour sur le marché interbancaire, considéré sans risque) et le taux EURIBOR (taux moyen d'emprunts de plusieurs mois sur le marché interbancaire, soumis au risque de défaut), qui était quasiment nul avant la crise, maintenant oscille autour de 50 bp en fonction de l'échéance (voir graphique 1.6). Ce risque fait maintenant l'objet d'un ajustement spécifique du prix : le DVA (debt valuation adjustment, censé refléter les variations dans le coût de la dette de la banque elle-même).
- Le risque de contrepartie donne lieu à l'ajustement CVA (credit valuation adjustment).

- Le risque systémique. Via les réseaux financiers complexes de l'économie moderne, les banques sont très interconnectées, et la faillite d'une grande banque crée une 'onde de choc' pouvant menacer le fonctionnement de tout le système financier d'un pays ou même du monde entier (on dit que la banque est trop grande pour lui permettre de faire faillite, 'too big to fail'). C'était le cas lors de la faillite de Lehman Brothers lorsqu'un effondrement généralisé a pu être évité seulement avec des injections de fonds sans précédent et un renflouement des banques à grande échelle par les pouvoirs publics. Pour arrêter la propagation des chaînes des défauts, les dérivés de crédit comme les CDS (credit default swaps) sont maintenant traités par les chambres de compensation qui minimisent le risque de contrepartie. Par ailleurs, un nouveau type de dette, les contingent convertible bonds (CoCos) peut être converti en actions dans les situations précises, en permettant ainsi de recapitaliser la banque rapidement et de manière automatique sans que le pouvoir publique ait besoin d'intervenir.

En réponse à la crise des subprimes, les pouvoirs publics ont mis en place de nouvelles réglementations ou ont modifié les réglementations existantes afin de stabiliser le fonctionnement des marchés et éviter les dérives dans l'avenir.

- Le Dodd-Frank Wall Street Reform and Consumer Protection Act (Dodd-Frank act) aux Etats-Unis signé par Obama en Juillet 2010 a affecté toute l'industrie financière américaine ainsi que ses agences de contrôle. Les nouveautés les plus importantes sont l'interdiction du trading pour compte propre par les banques, l'introduction du Conseil de Surveillance de Stabilité Financière etc.
- European Market Infrastructure Regulation adopté en août 2012 introduit de nouvelles règles de fonctionnement des marchés gré à gré des produits dérivés afin d'améliorer leur stabilité.
- L'accord de Bâle III, qui est mis en oeuvre progressivement entre 2013 et 2019 par les pays membres renforce les contraintes en capital (avec notamment la prise en compte explicite du risque de contrepartie avec un ajustement CVA) et liquidité et introduit notamment les provisions pour le risque de modèle des produits dérivés illiquides.
- Depuis 2007-2008, les banques font régulièrement l'objet des stress tests conduits par les régulateurs nationaux et visant à évaluer leur stabilité financière en cas de crise.

A la différence des autres établissements il s'est avéré difficile de reformer les agences de notation, qui continuent à fonctionner largement de la même manière. Leurs revenus en 2013 ont même dépassé les niveaux d'avant la crise [Economist, 2014], même si la part des produits structurés a baissé. Notamment, les agences sont toujours payées par les émetteurs des obligations. Le modèle alternatif où elles seraient payées par les acheteurs potentiels aurait ses défauts, notamment la manque de transparence sur le marché, car dans ce cas les acheteurs n'auraient pas intérêt à rendre les notations publiques.

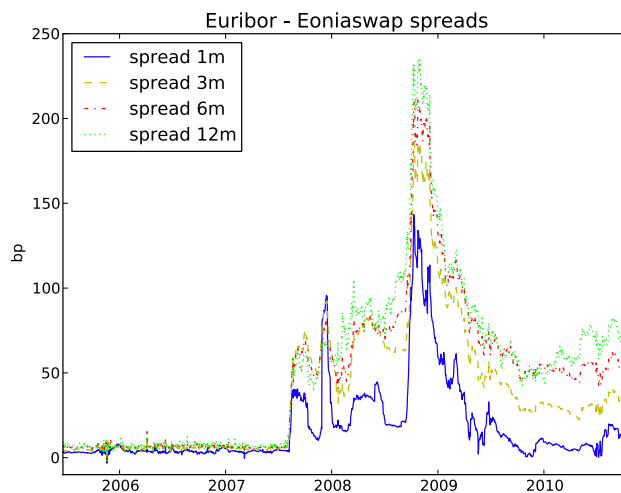


FIGURE 1.6 – Spread entre le taux sans risque EONIA et les taux EURIBOR avant et après la crise.

#### Chronologie de la crise

1987	Emission d'une première CDO par Drexel Burnham Lambert Inc.
2001	Le taux d'intérêt directeur de la FED passe en dessous de 2%
2006	Le taux de la FED atteint 5,75%. Les taux des prêts « subprime », variables, ont suivi la hausse. Le marché de l'immobilier s'effondre.
1ère moitié de 2007	Vague de faillites dans les organismes spécialisés en prêts subprime ; le marché subprime était estimé à 1300 milliards en mars 2007.
Juillet 2007	Bear Sterns, un géant américain de gestion d'actifs, annonce des pertes sans précédent dans deux de ses fonds investis massivement en CDO
Août 2007	Premier crise de liquidité alors que les CDO désormais illiquides sont découverts dans les portefeuilles des nombreuses banques et fonds du monde entier (dont BNP Paribas). Pour calmer la panique les banques centrales mettent à disposition du marché interbancaire 400 milliards d'euros
Octobre 2007	Merrill Lynch annonce des pertes de 8.4 milliards de dollars liées à son activité de CDO

**Chronologie de la crise**

Mars 2007	La banque Bear Stearns est vendue à JP Morgan avec des garanties de gouvernement fédéral pour éviter la faillite
Avril 2008	L'OCDE évalue les pertes dues aux subprimes à 422 milliards de dollars
Septembre 2008	Les deux géants du prêt hypothécaire, "Fannie Mae" et "Freddie Mac" sont effectivement nationalisés et reçoivent 200 milliards de dollars du gouvernement américain, l'assureur AIG qui vendait la protection contre le défaut des CDOs reçoit 85 milliards
14-15 septembre 2008	défaut de la banque d'affaires Lehman Brothers, effondrement d'AIG et le rachat de Merrill Lynch par Bank of America.
Octobre 2008	Le plan de sauvetage américain est adopté : 700 milliards de dollars pour recapitaliser les banques et garantir les avoirs dans le cadre du Troubled Assets Relief Program.
6 octobre 2008	Le CAC 40 enregistre sa plus forte chute quotidienne depuis sa création : -9%
13 octobre 2008	Le gouvernement français ouvre un crédit de 10,5 milliards d'euros aux 6 plus grandes banques privées du pays ; le CAC 40 bat son record historique de hausse quotidienne : +11%
4 novembre 2008	Election de Barack Obama aux Etats-Unis
16 décembre 2008	Plus bas niveau du taux directeur de la banque centrale américaine depuis 1954
19 décembre 2008	Adoption d'un plan de relance de 26 milliards d'euros en France
Mars 2009	L'ex-numéro un mondial de l'assurance, AIG, annonce 100 milliards de dollars de perte pour l'année 2008
5 mars 2009	La BCE ramène son principal taux directeur à 1,5%, plus bas niveau historique depuis la création de l'Euro en 1999.



## Chapitre 2

# Les produits dérivés

- Différents types des taux d'intérêt.
- Formule de valorisation d'un forward sur un actif financier (action, obligation).
- Classification des options et terminologie associée, forme des fonctions pay-off.
- Propriétés des prix des calls / puts en fonction du strike et du temps restant jusqu'à maturité.
- Stratégies classiques optionnelles : bull spread, bear spread, calendard spread, butterfly spread.
- Equivalence entre un call américain et un call européen.
- Principes de valorisation d'options ; différence entre valorisation actuarielle et valorisation financière.
- Modèles probabilistes du marché ; exemple du modèle binomial.

### 2.1 Forwards et futures

Un forward est un contrat entre deux contreparties dans lequel l'une des contreparties s'engage à vendre et l'autre à acheter un bien à une date donnée (notée par  $T$ ), à un prix donné (le prix à terme ou prix forward du bien). Le prix et les autres caractéristiques du contrat sont donc déterminés à la signature (date 0) mais la livraison et le paiement ont lieu à l'échéance (date  $T$ ). On dit que la partie qui s'engage à acheter le bien a une position longue, et la partie qui s'engage à vendre a une position courte. Les forwards, comme les autres produits dérivés, sont utilisés pour transférer les risques entre les participants du marché, pour la spéculation, ou bien pour exploiter des arbitrages potentiels.

- **Transfert des risques** : une compagnie travaillant à l'export peut utiliser des forwards sur taux de change pour éliminer le risque de fluctuation du cours d'une devise étrangère.
- **Spéculation** : un investisseur qui pense que le cours d'un indice va monter peut prendre une position longue en forwards sur cet indice pour réaliser un gain dans le cas d'un mouvement favorable du cours sans avoir à déboursier immédiatement de l'argent (ce qui serait nécessaire en investissant directement dans l'indice). Cette stratégie n'est pas une stratégie d'arbitrage car elle comporte un risque de perte dans le cas d'un mouvement défavorable du cours de l'indice.

- **Arbitrage** : si les forwards sont surévalués par rapport à la valeur du bien sous-jacent, on peut réaliser un gain sans risque en prenant une position courte en forwards et en achetant simultanément le bien pour le stocker jusqu'à l'échéance. Ainsi, la livraison du bien est assurée, et on récupère la différence entre le prix à terme et le prix spot (comptant) du bien, moins le coût de l'opération (financement + stockage).

Un future est un contrat qui permet de réaliser les mêmes objectifs qu'un contrat forward, mais qui est coté dans un marché organisé. Le rôle du marché est d'assurer la liquidité et d'éliminer le risque de contrepartie. La liquidité est assurée puisque les contrats sont standardisés : le nombre de différentes dates de livraison est limité et les sous-jacents sont décrits de manière précise. Ainsi, le nombre de différents contrats cotés est relativement faible et par conséquent, le volume pour chaque contrat est élevé ce qui permet de facilement trouver un acheteur / vendeur. De plus, pour chaque contrat standardisé le cours est publié en continu, rendant la valorisation plus transparente. Le risque de contrepartie est éliminé puisque tous les contrats ont une contrepartie unique : la chambre de compensation du marché, qui a très peu de chances de faire faillite.

Pour se protéger contre le défaut des participants du marché, la chambre de compensation utilise le dépôt de garantie et les appels de marge. Lorsqu'un agent prend une position courte ou longue sur un contrat future, il doit déposer un montant spécifique, qui dépend du cours du future, sur un compte ouvert auprès de la chambre de compensation (margin account). Ensuite, ce compte est crédité ou débité tous les jours d'un montant qui dépend de l'évolution du cours du future. Soit  $F_t$  le cours de clôture du future à la date  $t$ . Si l'investisseur a pris une position longue, à la date  $t$  son compte va être crédité d'un montant égal à  $F_t - F_{t-1}$ , et s'il a pris une position courte, son compte sera débité de ce même montant. Lorsque le solde du compte baisse au-delà d'un certain niveau, l'investisseur reçoit un appel de marge, qui l'informe qu'il doit compléter son dépôt initial par un montant approprié. Si le solde du compte devient élevé, l'investisseur peut en retirer une partie. A la date d'échéance du contrat, le compte est une dernière fois crédité / débité d'un montant égal à  $F_T - F_{T-1}$ , et le solde est remis à l'investisseur. Dans le cas d'un future avec règlement financier, le contrat s'arrête là ; avec livraison physique l'investisseur se voit livrer le bien sous-jacent et doit le payer au prix  $F_T$ .

### 2.1.1 Equivalence des prix de forwards / futures

Avant de procéder, il est important de fixer les notations concernant les taux d'intérêt.



**Taux d'intérêt** De manière générale le taux d'intérêt est une convention ; la quantité fondamentale sur les marchés est le coût du capital (prix d'une obligation), qui est unique ; mais ce prix peut être exprimé de différentes manières avec des taux d'intérêt différents.

Nous noterons par  $B_t(T)$  le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$  observé à la date  $t$ . Pour simplifier la notation, nous noterons parfois le prix de cette obligation observé à la date  $t = 0$  simplement par  $B(T)$ .

Dans ce poly, nous utiliserons essentiellement deux taux d'intérêt :

- Le taux périodique est défini par rapport à une période : jour, mois, année. Le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$  est alors donné par

$$B(T) = \frac{1}{(1+r)^T},$$

où  $r$  est le taux périodique et  $T$  est le nombre de périodes jusqu'à l'échéance ( $T$  est exprimé en années pour le taux annuel, en mois pour le taux mensuel etc.)

- Le taux continu ou exponentiel correspond à l'expression du prix de zéro-coupon

$$B(T) = e^{-rT},$$

où  $T$  est le temps jusqu'à l'échéance exprimé en années.

**Théorème 1.** *Supposons que le taux d'intérêt périodique journalier  $r$  est constant et le même pour les prêts et les emprunts. Alors le prix à terme d'un bien doit être égal, à toute date, au cours du contrat future de même échéance portant sur le même bien.*

*Démonstration.* Soit  $n$  l'échéance du contrat forward. On note par  $f_0$  le prix à terme à la date 0 et par  $F_k$  le cours du contrat future de même échéance à la date  $k \leq n$ . On utilise la stratégie suivante :

Date 0	Prendre une position longue sur $(1+r)^n$ forwards d'échéance $n$ et une position courte sur $1+r$ futures de même échéance
Date $k, 0 < k < n$	Payer l'appel de marge d'un montant $(1+r)^k(F_k - F_{k-1})$ ; ajuster la position en contrats futures à $(1+r)^{k+1}$ contrats
Date $n$	Payer le dernier appel de marge d'un montant $(1+r)^n(F_n - F_{n-1})$

On suppose que les montants des appels de marge payés / reçus aux dates intermédiaires sont soit empruntés à la banque au taux  $r$  soit placés au taux  $r$  (en fonction de leur signe) ; l'appel payé ou reçu à la date  $k$  doit donc être actualisé au taux  $r$  entre la date  $k$  et la date  $n$ . Par ailleurs, à la date  $n$ , on est long de  $(1+r)^n$  forwards et court de  $(1+r)^n$  contrats futures, qui arrivent tous à l'échéance. Le bilan de l'opération est donc

Appels de marge actualisés :	$-(1+r)^n(F_n - F_0)$
Contrats futures :	$(1+r)^n(F_n - S_n)$
Contrats forward :	$(1+r)^n(S_n - f_0)$
Soit au total :	$(1+r)^n(F_0 - f_0)$

Supposons que  $F_0 > f_0$ . Alors cette stratégie, à coût nul, est clairement un arbitrage. Si, au contraire,  $F_0 < f_0$ , alors la stratégie opposée (position courte en forwards et longue en futures) est

un arbitrage. On conclut que  $f_0$  doit être égal à  $F_0$  : le cours d'un contrat future est égal au prix à terme.  $\square$

### 2.1.2 Valorisation des forwards par non-arbitrage

En vue de l'équivalence entre forwards et futures démontrée au paragraphe précédent, nous nous concentrons désormais sur la valorisation des forwards. Le premier exemple concerne le forward sur un actif pouvant être vendu à découvert : un actif financier, ou un marchandise non-périssable qui est utilisé comme un investissement et peut être emprunté pour être vendu à découvert (par exemple, metal précieux).

**Théorème 2** (Forward sur un actif pouvant être vendu à découvert). *Le prix à terme d'échéance  $T$  d'un actif pouvant être vendu à découvert est donné par*

$$F = e^{rT}(S - I),$$

où  $S$  est le prix spot et  $I$  est la valeur présente en  $T = 0$  des dividendes (coupons) versés par l'actif (dans ce cas  $I > 0$ ) ou bien le coût de stockage de l'actif entre 0 et  $T$ , payable en  $T = 0$  (dans ce cas  $I < 0$ ).

*Démonstration.* Supposons dans un premier temps que  $F > e^{rT}(S - I)$ . Alors, la stratégie suivante à coût nul, permet de réaliser un gain de  $F - e^{rT}(S - I)$ . C'est donc un arbitrage (connu sous le nom d'arbitrage cash and carry).

Date 0	Prendre une position courte sur le forward ; emprunter le montant $S$ (si $I \geq 0$ ) ou $S - I$ (si $I < 0$ ) à la banque ; acheter l'actif ; payer le coût de stockage (si $I < 0$ )
Entre 0 et $T$	Stocker l'actif ; le cas échéant, récupérer les dividendes (coupons) et les placer à la banque
Date $T$	Livrer l'actif et récupérer le montant $F$ dans le cadre du contrat forward ; si $I < 0$ , rembourser $e^{rT}(S - I)$ à la banque ; si $I \geq 0$ , rembourser $e^{rT}S$ à la banque et récupérer les dividendes capitalisés $Ie^{rT}$ .

Cet argument montre que nécessairement  $F \leq e^{rT}(S - I)$  : puisque le forward permet de posséder l'actif à la date  $T$ , le prix à terme ne peut être supérieur au prix spot de l'actif plus le coût additionnel du capital nécessaire pour acheter l'actif aujourd'hui au lieu de le faire à la date  $T$  moins le montant de dividendes qu'on touche si on détient l'actif entre 0 et  $T$ . Remarquons que pour l'inégalité dans ce sens, la vente à découvert n'est pas nécessaire ; cette inégalité a donc une validité plus large que l'inégalité dans le sens opposé que nous allons maintenant démontrer.

Supposons maintenant que  $F < e^{rT}(S - I)$ . Alors, la stratégie suivante est un arbitrage.

Date 0	Prendre une position longue sur le forward ; vendre l'actif à découvert (l'emprunter puis le vendre) ; récupérer le coût de stockage (si $I < 0$ ) ; placer le montant $S$ (si $I \geq 0$ ) ou $S - I$ (si $I < 0$ ) à la banque ;
Date $T$	Si $I < 0$ , récupérer $e^{rT}(S - I)$ à la banque ; si $I \geq 0$ , récupérer $e^{rT}S$ à la banque. Prendre livraison de l'actif moyennant le paiement du prix $F$ dans le cadre du contrat forward ; restituer l'actif à celui à qui on l'avait emprunté ; si $I > 0$ , lui verser les dividendes capitalisés $Ie^{rT}$ .

Puisque cette deuxième stratégie nécessite de vendre à découvert l'actif, elle est plus difficile à mettre en place ; le prêt de l'actif ne sera typiquement pas gratuit (taux repo) et il y a le danger de rachat forcé : les courtiers forcent souvent leurs clients à racheter les titres vendus à découvert lorsque leurs prix montent trop brutalement.  $\square$

**Forwards sur marchandises** Lorsque le sous-jacent du contrat forward est un bien non-financier, qui est détenu non pas comme investissement mais par exemple parce qu'il fait partie d'un cycle de production, il n'est en général pas possible de l'emprunter pour le vendre à découvert. Dans ce cas le prix forward vérifie uniquement

$$F \leq e^{rT}(S + U),$$

où  $U$  est le coût de stockage, avec en général une inégalité stricte. La différence entre la partie droite et la partie gauche correspond à l'utilité additionnelle que l'agent économique tire du fait qu'il détient physiquement l'actif :

$$F = e^{rT}(S + U - Y).$$

Pour avoir des quantités indépendantes du temps et du volume, on écrit souvent

$$F = F(T) = e^{(r+u-y)T}S,$$

où  $u$  est le coût de stockage par unité de temps et par unité d'actif, et  $y$  est appelé la prime de convenance (convenience yield). Si l'actif est facilement disponible sur le marché, la prime de convenance n'est pas très élevée et  $r + u - y > 0$  : la courbe des prix à terme  $(F(T))_{T \geq 0}$  est croissante ; on dit qu'elle est en report (ou en contango en anglais). S'il y a un risque de rupture des stocks, il est important de détenir l'actif physiquement pour assurer la continuité de production et la prime de convenance peut être élevée : dans ce cas,  $r + u - y < 0$  et la courbe des prix à terme est décroissante ; on dit qu'elle est en déport (backwardation en anglais).

## 2.2 Introduction aux options

Les options les plus simples, de type Call et Put, sont une extension très naturelle des forwards : alors qu'un forward donne à son détenteur l'obligation d'acheter / vendre l'actif sous-jacent à une date future à un prix déterminé, l'option Call européen donne à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent à une date d'échéance future  $T$  à un prix déterminé  $K$ , appelé prix d'exercice ou strike, et l'option Put européen donne le droit mais non l'obligation de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$ . Les options Call et Put américaines donnent le droit d'acheter ou vendre l'actif sous-jacent à la date  $T$  ou à toute date future antérieure à  $T$ .

Lorsqu'à la date  $T$ , le détenteur d'un Call ou Put exerce le droit que lui confère son option, il touche  $S_T - K$  pour un Call et  $K - S_T$  pour un Put. Il est clair qu'il n'exercera son droit que si le montant qu'il récupère est positif : le détenteur d'un Call touche donc systématiquement le montant

$$H_T = (S_T - K)^+$$

et pour un Put, le montant

$$H_T = (K - S_T)^+,$$

où la notation  $()^+$  désigne la partie positive. Ce montant  $H_T$  s'appelle le pay-off de l'option.

**Terminologie**

- $K$  : *strike* (prix d'exercice).
- $T$  : date de maturité (échéance).
- Une option est *à la monnaie* à la date  $t$  si à cette date  $K = S_t$ .
- Une option est *dans la monnaie* : si elle devait expirer aujourd'hui son pay-off serait positif.
- La *valeur intrinsèque* d'une option est la quantité d'argent qu'elle rapporterait si elle devait expirer aujourd'hui (la valeur du pay-off aujourd'hui).
- La *valeur temps* d'une option est égale à son prix moins sa valeur intrinsèque.

**Notation**

Nous noterons par  $\text{Call}_t(T, K)$  le prix d'un Call européen d'échéance  $T$  et strike  $K$  observé à la date  $t$ . Nous écrirons parfois également  $\text{Call}(T, K)$  lorsque  $t = 0$ . Le prix d'un Call américain sera noté par  $\text{CallAmer}_t(T, K)$ , et les prix des Puts européen et américain, respectivement, par  $\text{Put}_t(T, K)$  et  $\text{PutAmer}_t(T, K)$ .

Les options plus complexes, qu'on appelle les options exotiques, dont quelques exemples sont donnés ci-dessous, sont souvent définies directement en termes de leur pay-off.

- Options à barrière : le paiement a lieu (n'a pas lieu) si le sous-jacent a dépassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date. Exemple (up and out call)

$$H_T = (S_T - K)^+ 1_{M_T < B}, \quad \text{où } M_T = \max_{t \leq u \leq T} S_u$$

- L'intérêt de cette option est qu'elle est moins chère que la call standard mais offre des garanties très similaires en situation normale (si la barrière est suffisamment haute).

- Options asiatiques : le payoff dépend de la valeur moyenne du cours de l'actif sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix) :

$$H_T = \left( \frac{1}{T-t} \int_t^T S_u du - K \right)^+$$

- Options multi-sous-jacent : sur un panier d'actions, un panier de taux de change etc.

$$H_T = \left( \sum_{i=1}^n w_i S_T^i - K \right)^+$$

- Options forward start. Le strike d'une telle option est déterminé à une date future selon une règle spécifique, par exemple,

$$H_T = (S_T - mS_{T_0})^+,$$

où  $T_0 < T$  est une date future et  $m$  est un nombre fixé dans le contrat (moneyness de l'option).

Comme les futures et les forwards, les options peuvent être utilisées pour le transfert des risques, pour prendre des paris sur l'évolution des actifs de base, et éventuellement pour exploiter des arbitrages potentiels, tout en offrant beaucoup plus de liberté et souplesse dans ces utilisations. Les deux exemples suivants illustrent l'utilisation d'options pour contrôler et limiter les risques associés aux fluctuations des cours boursiers.

*Exemple 1* (Put protectif). Un Put protectif est une combinaison d'une position longue dans un actif et d'une option Put sur le même actif. Le pay-off à l'échéance de l'option est alors donné par  $H_T = (K - S_T)^+ + S_T = \max(S_T, K)$ . Ce montage permet donc de limiter les pertes à un niveau  $K$  souhaité.

*Exemple 2* (Constitution d'un fonds garanti). Certains fonds d'investissement offrent à leurs clients une garantie de performance minimale. Ce type de garantie peut être mis en place en utilisant des options. Supposons que l'investissement initial est normalisé à 1, et que l'investisseur est assuré de recevoir au moins  $K$  à l'échéance  $T$ . Pour ne pas créer une opportunité d'arbitrage, la valeur  $K$ , appelée le plancher, doit être choisi de sorte que  $KB(T) < 1$ , où  $B(T)$  est le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$ . La stratégie suivante permet alors de respecter la contrainte tout en gardant un potentiel de gain :

- Investir une fraction  $\lambda$  du fonds dans l'actif risqué  $S$ . Pour simplifier la notation nous supposons que la valeur initiale de l'actif risqué a également été normalisée à 1.
- Utiliser le montant résiduel pour l'achat d'un Put sur  $\lambda S$  d'échéance  $T$  et strike  $K$ , ou, de manière équivalente,  $\lambda$  Puts sur  $S$  de strike  $K/\lambda$ .

Le pay-off de la partie optionnelle à la date  $T$  est égal à  $(K - \lambda S_T)^+$ , et la valeur du fonds est donnée par

$$\lambda S_T + (K - \lambda S_T)^+ = \max(K, \lambda S_T).$$

Pour que cette allocation soit réalisable, la valeur  $\lambda$  doit vérifier la contrainte du budget : la somme du montant investi en l'actif risqué et du prix de l'option doit valoir 1 :

$$\lambda + \text{Put}^{\lambda S}(T, K) = 1, \tag{2.1}$$

où  $\text{Put}^{\lambda S}(T, K)$  est le prix de l'option sur  $\lambda S$  d'échéance  $T$  et strike  $K$ . Soit

$$f(\lambda) = \lambda + \text{Put}^{\lambda S}(T, K)$$

Alors,  $f(0) = KB(T) < 1$  et  $f(1) = 1 + \text{Put}^S(T, K) > 1$ . Donc, si  $f(\lambda)$  est une fonction continue, il existe  $\lambda^* \in (0, 1)$  qui vérifie (2.1).

En tant qu'un produit spéculatif, les options permettent de prendre des paris sur certains scénarios d'évolution du marché selon les stratégies suivantes.

**Stratégies optionnelles**

- L'achat d'un Call permet de parier sur la hausse du sous-jacent, et l'achat d'un Put sur la baisse, avec beaucoup plus de levier, mais aussi beaucoup plus de risque que l'achat du sous-jacent lui-même.
- Le Bull spread (achat d'un Call de strike  $K_1$ , vente d'un Call de strike  $K_2 > K_1$ , de même échéance) et le Bear spread (vente d'un Put de strike  $K_1$ , achat d'un Put de strike  $K_2 > K_1$ , de même échéance) sont aussi des paris directionnels; ils ont l'avantage d'être moins chers que les options elle-mêmes, mais les gains sont limités.
- Le Straddle (achat simultané d'un Call et un Put de même strike, typiquement choisi égal à la valeur présente du sous-jacent, et même échéance) permet de parier sur la hausse de volatilité du sous-jacent (plus le sous-jacent s'éloigne de sa valeur présente, plus le straddle va rapporter).
- Le Butterfly spread (achat d'un Call de strike  $K - h$  et d'un Call de strike  $K + h$ ; vente de 2 Calls de strike  $K$ , tous de même échéance — où le strike  $K$  est typiquement égal à la valeur présente du sous-jacent) permet de parier sur la baisse de la volatilité : le pay-off est maximal si le sous-jacent reste proche de sa valeur.
- Le calendar spread (achat d'un Call de strike  $K$  et échéance  $T_1$  et vente d'un Call de strike  $K$  et échéance  $T_2 < T_1$ ) permet également de parier sur la hausse de la volatilité.

**2.2.1 Propriétés des prix de calls/puts**

Dans cette section, pour obtenir les relations vérifiées par les prix des différentes options, nous allons employer une propriété plus faible que l'absence d'arbitrage : la non-domination.

**Définition 1** (Propriété de non-domination). Soit  $X$  le gain terminal d'une stratégie de coût initial  $x$ . Si  $X \geq 0$  dans tous les états de la nature alors  $x \geq 0$ .

Il est facile de voir qu'il existent des marchés vérifiant la non-domination et admettant des arbitrages.

**Parité call-put** Supposons dans un premier temps que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende. Alors, les prix du Call et du Put de même strike et même échéance sont liés par la relation suivante :

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB_t(T),$$

En effet, à la date  $T$ , on a

$$\text{Call}_T(T, K) - \text{Put}_T(T, K) = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

Par le principe de non-domination, à la date  $t$ , la différence entre le prix du Call et le prix du Put de même strike et échéance doit donc être égale au prix d'un portefeuille dont la valeur à la date  $T$  est  $S_T - K$ , c'est-à-dire à  $S_t - KB_t(T)$ .

**Bornes sur les prix des calls et puts** En conséquence de la parité call-put, on obtient les bornes suivantes pour les prix de calls / puts :

$$(S_t - K)^+ < (S_t - KB_t(T))^+ \leq \text{Call}_t(T, K) \leq S_t. \quad (2.2)$$

$$(KB_t(T) - S_t)^+ \leq \text{Put}_t(T, K) \leq KB_t(T). \quad (2.3)$$

La valeur temps d'une option Call sur un actif ne versant pas de dividende est donc toujours positive.

**Dépendance des prix d'options par rapport aux paramètres**

- Le prix d'un Call est décroissant par rapport au strike (et le prix d'un Put est croissant)

$$K_1 \leq K_2 \quad \Rightarrow \quad \text{Call}(T, K_1) \geq \text{Call}(T, K_2).$$

Cette propriété découle de l'existence de la stratégie Bull spread qui consiste à acheter un Call de strike  $K_1$  et à vendre un Call de strike  $K_2$ . Comme cette stratégie a un pay-off positif, son prix doit être positif. De plus, le pay-off d'un Bull spread ou d'un Bear spread est borné par  $|K_2 - K_1|$ ; cela implique que  $\text{Call}_t(T, K)$  et  $\text{Put}_t(T, K)$  sont Lipschitz en  $K$  avec la constante  $B_t(T)$ .

- Les prix des Calls/Puts sont convexes par rapport au strike. Cette propriété correspond à la stratégie Butterfly spread. On vérifie que cette stratégie a également un pay-off positif dans tous les états de la nature ce qui implique la convexité.
- Le prix d'un Call est croissant avec la maturité :  $T_1 \leq T_2$  implique  $\text{Call}(T_1, K) \leq \text{Call}(T_2, K)$ . Cette propriété correspond à la stratégie Calendar spread : acheter un Call de maturité  $T_2$  et vendre un Call de même strike de maturité  $T_1$ . A la date  $T_1$ , cette stratégie a un pay-off positif par (2.2); son prix doit donc être positif à toute date.

**Cas d'un sous-jacent versant des dividendes** Pour des options sur un sous-jacent versant des dividendes la relation de parité Call-Put est modifiée. A l'échéance nous avons toujours

$$\text{Call}_T(T, K) - \text{Put}_T(T, K) = S_T - K,$$

cependant pour percevoir ce flux à la maturité, il n'est pas nécessaire d'investir  $S_t - B_t(T)K$  à la date  $t$ . Si l'action verse des dividendes discrets connus  $D_1, \dots, D_N$  aux dates  $t_1, \dots, t_N < T$ , alors en achetant une action et en empruntant

$$\sum_{i=1}^N D_i B_t(t_i) + K B_t(T)$$

à la banque à la date  $t$ , on aura le flux  $S_T - K$  à la date  $T$ . La parité Call-Put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - \sum_{i=1}^N D_i B_t(t_i) - K B_t(T).$$

Pour les indices contenant plusieurs actions, on utilise un général l'approximation de taux de dividende continu, i.e., on suppose que l'indice  $S_t$  verse en continu un dividende égal à  $qS_t dt$ . Dans ce cas il est facile de voir que pour s'assurer d'avoir  $S_T$  à la maturité, on doit investir le montant  $S_t D_t(T)$  à la date  $t$ , où  $D_t(T) = e^{-q(T-t)}$ . La parité Call-Put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t D_t(T) - K B_t(T).$$

La dérivation des bornes analogues à (2.2)–(2.3) est laissée en exercice.

### 2.2.2 Option américaines

Pour les options américaines, l'exercice est possible à toute date  $t$  avant la maturité  $T$  ou à la maturité. Le prix d'une option américaine est donc en général supérieur au prix de l'option européenne correspondante :

$$\text{CallAmer}_t(T, K) \geq \text{Call}_t(T, K), \quad \text{PutAmer}_t(T, K) \geq \text{Put}_t(T, K).$$

La différence entre les deux prix s'appelle la *prime d'exercice anticipée*. Dans le cas particulier du Call américain sur un actif ne versant pas de dividende, par la formule (2.2), on a

$$\text{CallAmer}_t(T, K) \geq \text{Call}_t(T, K) > (S_t - K)^+, \quad t < T.$$

En l'absence de dividendes, il n'est donc jamais optimal d'exercer le call américain avant l'échéance, et le prix du call américain est égal au prix de l'option européenne correspondante.

Pour le Put, la situation est très différente. Supposons qu'à une date  $t$ ,  $S_t < K(1 - B_t(T))$ . Alors l'exercice immédiat de l'option rapporte  $K - S_t > KB_t(T)$ , alors que le prix de l'option européenne est borné par  $KB_t(T)$  par la formule (2.3). Dans cette situation, le prix du Put américain est donc strictement supérieur à celui du Put européen et la prime d'exercice anticipée est strictement positive. Il est alors intéressant de comprendre de combien le prix du Put américain peut excéder le prix du Put européen. Le résultat suivant donne une réponse à cette question.

**Théorème 3.** *Supposons que le taux d'intérêt est constant et égal à  $r$ . Alors,*

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) \leq K(1 - e^{-r(T-t)}).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque pour  $s > t$

$$(K - S_s)^+ \leq (Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+ + K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)}),$$

le prix à la date  $t$  d'un Put américain est majoré par la somme du prix d'une option américaine qui verse  $(Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+$  si elle est exercée en  $s$  et de la quantité  $K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)})$ . Or,

$$(Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+ < (Ke^{-r(T-s)} - S_s)^+ \leq \text{Put}_s(T, K),$$

ce qui montre que cette option américaine modifiée ne sera jamais exercée avant l'échéance, et que donc son prix coïncide avec le prix du Put européen. On en déduit :

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) \leq K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)}),$$

et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, le théorème est démontré. □

## 2.3 Principes de valorisation d'options

Nous avons vu que les contrats à terme financiers peuvent être valorisés par le seul principe de non domination, alors que pour les options cette méthode ne donne que des bornes sur les prix possibles, et ne permet pas de déterminer le prix précisément. Pour donner un prix à ces produits plus complexes, il faudra faire appel à un modèle probabiliste du marché, c'est-à-dire, décrire l'ensemble des scénarios possibles d'évolution future du marché avec les probabilités associés et définir



les portefeuilles admissibles, c'est-à-dire les stratégies d'investissement qui peuvent être utilisées par les agents. Parmi tous les portefeuilles admissibles on distingue les portefeuilles *autofinancés* qui sont celles où aucun financement additionnel n'est apporté au portefeuille après sa création, et le gain provient uniquement de la variation des cours des actifs détenus par l'investisseur. Dans ce contexte, la propriété d'absence d'arbitrage sur le marché est formulée de la manière suivante.

Il n'existe pas de portefeuille autofinancé, de coût initial nul, tel que sa valeur à une date future  $T$  est positive presque sûrement et strictement positive avec une probabilité non nulle.

Si la classe des portefeuilles admissibles est suffisamment grande, on peut en trouver un dont la valeur terminale coïncide avec le pay-off de l'option qu'on cherche à valoriser. On dit alors que le portefeuille réplique l'option. L'absence d'arbitrage implique que le prix de l'option à la date initiale coïncide avec la valeur initiale du portefeuille de réplification. Le vendeur de l'option peut, en théorie, complètement éliminer son risque en achetant le portefeuille de réplification correspondant. Mais le prix de non-arbitrage dépend fortement du modèle choisi et en pratique ne constitue qu'une approximation de la valeur du produit financier qui sera d'autant plus précise que le modèle est réaliste.

**Modèle binomial à une période** Pour donner un exemple de valorisation par réplification, considérons un marché extrêmement simple, où le trading n'a lieu qu'à deux dates,  $t = 0$  et  $t = 1$ . Le marché consistera de deux actifs, dont les prix à la date  $t = 0$  sont notés respectivement par  $S_0^0$  et  $S_0^1$  et les prix à la date  $t = 1$  sont  $S_1^0$  et  $S_1^1$ . L'actif  $S^0$  est sans risque, dans le sens que  $S_1^0$  est déterministe :  $S_1^0 = (1+r)S_0^0$  où  $r > 0$  est le taux d'intérêt. L'actif  $S^1$  est risqué : sa valeur en  $t = 1$  n'est pas connue en  $t = 0$  et peut prendre deux valeurs possibles :  $S_1^1 = uS_0^1$  avec probabilité  $p$  et  $S_1^1 = dS_0^1$  avec probabilité  $1-p$ . Essayons de construire un portefeuille de réplification pour une option européenne de pay-off  $h(S_1^1)$  à la date  $t = 1$ . Soit  $\phi^0$  la quantité d'actifs sans risque dans le portefeuille et  $\phi^1$  la quantité d'actif risqué. Alors la condition de réplification dans les deux scénarios d'évolution du marché donne

$$\phi^0 S_0^0(1+r) + \phi^1 S_0^1 d = h(S_0^1 d), \quad \phi^0 S_0^0(1+r) + \phi^1 S_0^1 u = h(S_0^1 u).$$

En résolvant ces équations, on trouve la stratégie optimale

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1+r)S_0^0 & dS_0^1 \\ (1+r)S_0^0 & uS_0^1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h(dS_0^1) \\ h(uS_0^1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{S_0^0 S_0^1 (1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} uS_0^1 & -dS_0^1 \\ -(1+r)S_0^0 & (1+r)S_0^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(dS_0^1) \\ h(uS_0^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{uh(dS_0^1) - dh(uS_0^1)}{S_0^0(1+r)(u-d)} \\ \frac{h(uS_0^1) - h(dS_0^1)}{S_0^1(u-d)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur du portefeuille de réplification en  $t = 0$  et donc le prix de l'option est donné par

$$V_0 = \phi^0 S_0^0 + \phi^1 S_0^1 = \frac{uh(dS_0^1) - dh(uS_0^1)}{(1+r)(u-d)} + \frac{h(uS_0^1) - h(dS_0^1)}{(u-d)} = \frac{qh(uS_0^1) + (1-q)h(dS_0^1)}{1+r},$$

où  $q := \frac{1+r-d}{u-d} \in (0, 1)$ . Autrement dit, on peut écrire le prix de l'option comme l'espérance actualisée de son pay-off sous une probabilité  $\mathbb{Q} = \{q, 1-q\}$  qui n'est pas directement liée à la probabilité

historique  $\mathbb{P} = \{p, 1 - p\}$ . Cette probabilité s'appelle la *probabilité risque-neutre* car sous cette probabilité les prix des actifs risqués sont donnés par les espérances de leurs pay-offs alors que dans le monde réel les investisseurs demandent une prime additionnelle pour compenser leurs risques.

La méthode financière de valorisation par replication est fondamentalement différente de la valorisation des polices en assurance. Supposons qu'une compagnie d'assurance (disons, automobile pour fixer les idées) a vendu des polices à  $N$  clients, dont les risques sont supposés identiquement distribués. Le paiement au  $n$ -ième assuré à la fin de l'année sera noté  $S^n$ . Puisque les accidents de circulation des différents assurés sont des événements indépendants, on peut supposer que les variables  $(S^1, \dots, S^N)$  sont i.i.d. Soit  $m = \mathbb{E}[S^1]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}[S^1]$ . Alors, par le TCL, lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \sum_{n=1}^N \left( -S^n + m - \frac{x\sigma}{\sqrt{N}} \right) \leq 0 \right] \rightarrow N(x),$$

où  $N(x)$  est la fonction de repartition de la loi normale centrée réduite. Autrement dit, pour assurer, asymptotiquement pour un grand nombre de polices, la solvabilité de la firme avec probabilité  $\alpha$  à la fin de l'année, il faut choisir une prime de chaque police égale à

$$\mathbb{E}[S^1] - \frac{N^{-1}(\alpha)\sigma}{\sqrt{N}}.$$

C'est-à-dire qu'à une petite correction près la prime d'une police d'assurance est égale à l'espérance *sous la probabilité historique* du flux terminal. Ceci s'explique par le fait qu'en assurance on ne cherche pas à annuler le risque de chaque police, et la solvabilité de la compagnie est garantie par la compensation des risques d'un grand nombre d'assureurs indépendants. En finance, cette logique ne fonctionne pas, car même si on vend un grand nombre d'options, elles seront toutes affectées par le risque du marché, qui ne peut pas être complètement diversifié. Par conséquent, on essaie d'annuler le risque de chaque option dans chaque scénario de marché avec un portefeuille de couverture.

Le fonctionnement des CDOs avant la crise des subprimes était fondé sur la logique d'assurance : on estimait que la diversification des risques de non-remboursement des différents emprunteurs réduit quasiment à zéro le risque de ces produits. Or en réalité il n'en est rien : les emprunteurs immobiliers sont loin d'être indépendants car ils sont tous sensibles au risque systémique de retournement du marché immobilier.

## Chapitre 3

# La formule de Black et Scholes

- Le modèle de Black-Scholes-Samuelson (mouvement brownien géométrique) pour le cours d'un actif. Volatilité et espérance de rendement du prix dans ce modèle.
- Volatilité et espérance de rendement d'un processus de prix arbitraire; calcul à l'aide de la formule d'Itô.
- Dynamique d'un portefeuille autofinçant avec un seul actif risqué; notion du levier financier; actualisation.
- Stratégie de réplication d'une option européenne dans le modèle de Black-Scholes. EDP de Black-Scholes. Couverture en delta.
- Evaluation des prix des options européennes par espérance risque-neutre. Formule de Black-Scholes.
- Rôle, expression et propriétés des sensibilités (grecques tels que Delta, Vega, Gamma, Rho, Theta) des options Call et Put dans le modèle de Black-Scholes.
- Robustesse de la formule de Black-Scholes.
- Volatilité implicite : définition, algorithme de calcul, phénomène de smile de volatilité implicite.

### 3.1 Mouvement brownien géométrique

Soit  $(W_t)$  un mouvement brownien standard. Le modèle de Black-Scholes-Samuelson pour le prix d'un actif risqué s'écrit

$$S_t = S_0 e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}. \quad (3.1)$$

On suppose par ailleurs qu'il existe un actif sans risque dont le prix à l'instant  $t$  est  $S_t^0 = e^{rt}$ . Pour terminer la description de notre marché, nous supposons également qu'il est possible d'acheter ou vendre l'un ou l'autre actif sans coût de transaction ni restriction sur le volume, et que sur le marché il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

Pour comprendre l'origine du terme  $\frac{\sigma^2}{2}t$  dans l'exponentielle, calculons l'espérance et la variance du rendement de l'actif risqué entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  :

$$R_{t_i} = \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} \Rightarrow \mathbb{E}[R_{t_i}] = e^{b\Delta t_i} - 1 = b\Delta t_i + O(\Delta t_i^2),$$

$$\mathbb{V}ar[R_{t_i}] = e^{2b\Delta t_i}(e^{\sigma^2\Delta t_i} - 1) = \sigma^2\Delta t_i + O(\Delta t_i^2).$$

La *volatilité* d'un actif est traditionnellement définie comme l'écart type des rendements. Comme le taux d'intérêt, la volatilité doit être rapportée à une période de temps : on parle de la volatilité journalière, mensuelle, annualisée etc. Dans ce cours, on utilisera exclusivement la volatilité annualisée, qui est donc donnée par

$$\sqrt{\frac{\mathbb{V}ar[R_{t_i}]}{\Delta t_i}}$$

On voit alors que dans l'écriture (3.1),  $\sigma$  représente la volatilité annualisée de l'actif sur une petite période. Dans la suite, on dira simplement que  $\sigma$  est la volatilité du prix dans le modèle de Black-Scholes. Le coefficient  $b$ , quant à lui, représente l'espérance annualisée du rendement.

Une autre façon d'écrire la formule (3.1) est sous forme d'une équation différentielle stochastique (l'EDS classique de Black-Scholes-Samuelson)

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t. \quad (3.2)$$

Le lien entre les deux formules peut être établi par la formule d'Itô.

Dans le modèle de Black-Scholes, la volatilité apparaît donc comme le coefficient devant le brownien dans l'écriture (3.2) pour le processus de prix.

Par analogie avec le modèle Black-Scholes, lorsque le processus de prix d'un actif peut être écrit sous la forme (3.2), on appellera le coefficient devant le brownien sa volatilité, et le coefficient devant  $dt$  espérance du rendement.

Par exemple, supposons que le prix d'une option est donnée par une fonction connue du prix du sous-jacent vérifiant le modèle de Black-Scholes :  $P_t = u(t, S_t)$ . Alors, par la formule d'Itô on peut écrire

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t} + bS_t \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}}{u(t, S_t)} dt + \frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}}{u(t, S_t)} dW_t$$

On voit alors que la volatilité du prix de l'option est donnée par

$$\frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}}{u(t, S_t)}.$$

## 3.2 Dynamique d'un portefeuille autofinçant

On considère un portefeuille financier contenant une certaine quantité de l'actif sans risque et une certaine quantité de l'actif risqué. On suppose que le gérant de ce portefeuille peut modifier les positions en vendant l'actif sans risque pour acheter l'actif risqué et vice versa, mais à aucun

moment l'argent n'est rajouté ni retiré du portefeuille. Un tel portefeuille s'appelle un portefeuille autofinçant. Soit  $\delta_t$  le nombre d'unités de l'actif risqué et  $X_t$  la valeur du portefeuille à l'instant  $t$ . En supposant dans un premier temps que le portefeuille est reajusté aux dates discrètes  $t_1, \dots, t_n$ , son évolution entre deux dates de réajustement consécutives est

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \delta_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + (X_{t_i} - \delta_{t_i}S_{t_i}) \frac{S_{t_{i+1}}^0 - S_{t_i}^0}{S_{t_i}^0}$$

**Actualisation** Ces expressions et le traitement qui va suivre se simplifient en choisissant l'actif sans risque comme *numéraire*, c'est-à-dire en exprimant la valeur du portefeuille, et celle de l'actif risqué non pas en euros mais en nombre d'unités de l'actif sans risque :

$$\tilde{X}_t = \frac{X_t}{S_t^0}, \quad \tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}.$$

On a alors (à vérifier en exercice)

$$\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i} = \delta_{t_i}(\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i}).$$

En faisant tendre le pas de reajustement de portefeuille vers 0, on obtient l'expression équivalente en temps continu qui fait intervenir une intégrale stochastique :

$$d\tilde{X}_t = \delta_t d\tilde{S}_t.$$

En revenant aux quantités non-actualisées, on a alors

**L'équation du portefeuille autofinçant en temps continu exprimée en termes du nombre d'unités de l'actif risqué**

$$dX_t = \delta_t dS_t + (X_t - \delta_t S_t) r dt.$$

Le trading continu est forcément une abstraction, puisqu'en pratique les seules stratégies possibles sont celles où le portefeuille est reajusté un nombre fini de fois. Cependant cette abstraction est assez proche de la réalité pour les actifs suffisamment liquides et permet d'obtenir des résultats importants. Par la suite, nous allons quantifier l'effet de discrétisation des stratégies de trading sur les résultats obtenus.

Lorsque le prix du portefeuille  $X_t$  est tout le temps positif, on peut exprimer la stratégie d'investissement de manière équivalente en termes de la proportion (ou poids) de la richesse totale investié en l'actif risqué, notée par  $\omega_t$ . Cette proportion est reliée au nombre d'unités à acheter via  $\omega_t = \frac{\delta_t S_t}{X_t}$ .

**En termes de la proportion investie en actif risqué, l'équation du portefeuille autofinçant devient**

$$\frac{dX_t}{X_t} = (1 - \omega_t)r dt + \omega_t \frac{dS_t}{S_t} = (\omega_t b + (1 - \omega_t)r) dt + \omega_t \sigma dW_t.$$

On voit que la volatilité d'un portefeuille qui investit la proportion  $\omega_t$  dans l'actif risqué est égale à  $\omega_t \sigma$ , et que son espérance de rendement en excès du rendement de l'actif sans risque est égale à

$\omega_t(b - r)$ . Dans ce portefeuille, le montant investi en l'actif sans risque est donné par  $X_t(1 - \omega_t)$ , c'est-à-dire, si  $\omega_t > 1$ , la stratégie consiste à emprunter pour investir un montant supérieur à la valeur du portefeuille en l'actif risqué. Dans ce cas, on dit que le portefeuille comporte un levier. Le levier augmente à la fois l'espérance du rendement et le risque (volatilité) du portefeuille.

### 3.3 Construction du portefeuille de réplication

On souhaite répliquer une option européenne (type call ou put) de pay-off à l'échéance  $T$  donné par  $g(S_T)$ . Si on arrive à construire un portefeuille autofinçant tel que  $X_T = g(S_T)$ , alors, par l'absence d'arbitrage, la valeur (l'unique prix qui ne génère pas d'opportunité d'arbitrage) de l'option en  $t = 0$  doit être égale à la valeur du portefeuille de réplication, donc à  $X_0$ .

Soit  $v(t, S) : [0, T] \times (0, \infty)$  une fonction du temps et de la valeur du sous-jacent appartenant à la classe  $C^{1,2}$ . Nous allons identifier les conditions que cette fonction doit vérifier pour qu'elle représente la valeur de l'option, mais dans un premier temps, cherchons un portefeuille autofinçant qui réplique cette fonction, c'est-à-dire qu'il vérifie  $X_t = v(t, S_t)$ .

Commençons par analyser l'évolution de  $v(t, S_t)$  entre 0 et  $T$ . La formule d'Itô donne

$$v(T, S_T) = v(0, S_0) + \int_0^T \left\{ \frac{\partial v}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \right\} dt + \int_0^T \frac{\partial v}{\partial S} dS_t.$$

Pour que cette valeur puisse être répliquée par un portefeuille autofinçant, il faut que sa dynamique corresponde à la dynamique du portefeuille autofinçant

$$X_T = X_0 + \int_0^T \delta_t dS_t + \int_0^T (X_t - \delta_t S_t) r dt.$$

Il faut donc faire disparaître les termes en  $dt$ . Pour cela supposons que la fonction  $v$  est une solution sur  $[0, T] \times (0, \infty)$  de l'EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r \left( v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right). \quad (3.3)$$

Dans ce cas,

$$v(T, S_T) = v(0, S_0) + \int_0^T \frac{\partial v}{\partial S} dS_t + \int_0^T \left( v - S_t \frac{\partial v}{\partial S} \right) r dt,$$

et en choisissant

$$\delta_{t_i} = \frac{\partial v}{\partial S}(t_i, S_{t_i}), \quad X_0 = v(0, S_0),$$

on a que

$$X_T = v(T, S_T).$$

Nous avons donc identifié un portefeuille autofinçant, qui réplique une fonction arbitraire du temps et du sous-jacent, qui vérifie l'EDP (3.3). Mais nous avons le droit également de choisir la condition terminale pour l'EDP. Choisissons alors le pay-off de l'option comme condition terminale :

$$v(T, S_T) = g(S_T).$$

Dans ce cas,  $X_T = g(S_T)$  : nous avons identifié le portefeuille autofinçant qui réplique le pay-off de l'option. Cela implique par l'absence d'arbitrage que la valeur de l'option à toute date doit nécessairement être égale à la valeur du portefeuille de réplication et donc à  $v(t, S_t)$ .

Avec ce raisonnement nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 4** (EDP de Black-Scholes et portefeuille de réplication). *Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à la date  $t$  d'une option européenne de pay-off  $g(S_T)$  à la date  $T$  est donné par  $v(t, S_t)$ , où la fonction  $v$  est la solution sur  $[0, T] \times (0, \infty)$  de l'EDP*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r \left( v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right), \quad v(T, S) = g(S). \quad (3.4)$$

*Cette option peut être répliquée par un portefeuille autofinçant de valeur initiale  $X_0 = v(0, S_0)$ , et qui contient à toute date  $t$ ,  $\frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$  unités de l'actif risqué.*

Pour répliquer une option européenne dans le modèle de Black-Scholes, on peut donc utiliser la procédure suivante :

1. Calculer la fonction de prix  $v(t, S)$  de l'option en résolvant l'équation (3.4).
2. Calculer la dérivée  $\frac{\partial v}{\partial S}$  pour obtenir le ratio de couverture.

Cette procédure marche si l'EDP (3.4) admet une et unique solution. Le résultat suivant précise ce point et donne un moyen pour calculer la solution.

**Théorème 5.** *Soit  $g$  une fonction à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe  $p$  tel que  $|g(x)| \leq C(1 + |x|^p)$  pour tout  $x$ . Alors l'EDP (3.4) admet l'unique solution dans la classe de fonctions à croissance polynomiale, appartenant à  $C^0([0, T] \times (0, \infty)) \cap C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty))$  donnée par*

$$v(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} g(S e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}}) \right]$$

*Démonstration.* Il est immédiat de prouver, en utilisant le théorème de convergence dominée, que la fonction  $v$  est à croissance polynomiale et appartient à  $C^0([0, T] \times (0, \infty)) \cap C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty))$ . Montrons que cette fonction vérifie bien l'EDP (3.4). Soit

$$\hat{S}_u = S e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(u-t) + \sigma W_{u-t}}, \quad u \geq t$$

et  $\tau := \inf\{u > t : |\ln(\hat{S}_u/S)| > 1\}$ . On a :

$$v(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(\tau \wedge h - t)} v(\tau \wedge h, \hat{S}_{\tau \wedge h}) \right]$$

pour tout  $h > t$ . En appliquant la formule d'Itô, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E} \left[ \int_t^{\tau \wedge h} e^{-ru} \left\{ -rv + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{S}_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + r \hat{S}_u \frac{\partial v}{\partial S} \right\} du + \int_t^{\tau \wedge h} e^{-ru} \frac{\partial v}{\partial S} \sigma \hat{S}_u dW_u \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_t^{\tau \wedge h} e^{-ru} \left\{ -rv + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{S}_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + r \hat{S}_u \frac{\partial v}{\partial S} \right\} du \right]. \end{aligned}$$

Il reste alors à diviser l'espérance par  $h - t$  et passer à la limite  $h \downarrow t$ , en appliquant le théorème de convergence dominée.

Montrons maintenant l'unicité de solution dans la classe des fonctions à croissance polynomiale. Soit  $\tau_n := \inf\{u > t : |\ln(\hat{S}_u/S)| > n\}$  et soit  $v$  une solution de l'EDP (3.4). Alors la formule d'Itô implique que

$$e^{-r(T \wedge \tau_n)} v(T \wedge \tau_n, \hat{S}_{T \wedge \tau_n}) = e^{-rt} v(t, S) + \int_t^{T \wedge \tau_n} e^{-rt} \frac{\partial v}{\partial S}(u, \hat{S}_u) \sigma \hat{S}_u dW_u.$$

Puisque l'intégrand dans l'intégrale stochastique est bornée sur  $[t, T \wedge \tau_n]$ , on a

$$e^{-rt} v(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T \wedge \tau_n)} v(T \wedge \tau_n, \hat{S}_{T \wedge \tau_n}) \right].$$

Par continuité,

$$e^{-r(T \wedge \tau_n)} v(T \wedge \tau_n, \hat{S}_{T \wedge \tau_n}) \rightarrow e^{-rT} v(T, \hat{S}_T) = e^{-rT} g(\hat{S}_T)$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Pour passer à la limite sous l'espérance on applique le théorème de convergence dominée en utilisant la croissance polynomiale de  $v$  et le fait que le supremum du mouvement sur  $[t, T]$  admet tous les moments exponentiels. □

### 3.4 La formule de Black et Scholes

**Théorème 6** (Formule de Black et Scholes). *Le prix d'une option call européen de pay-off  $g(S) = (S - K)^+$  dans le modèle de Black-Scholes est donné par*

$$v(t, S) := C_{BS}(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

où

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{S}{Ke^{-r(T-t)}} \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Le ratio de couverture (delta) est donné par

$$\Delta_{BS}(t, S) = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) = N(d_1).$$



*Démonstration.* Par Théorème (5),

$$C_{BS}(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} \left( S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} - K \right)^+ \right] = P_1 - P_2$$

avec  $P_1 = \mathbb{E} \left[ S e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_{T-t}} \mathbf{1}_{S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K} \right]$

$$P_2 = K e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K} \right] = K e^{-r(T-t)} \mathbb{P} \left[ S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K \right].$$

On montre alors facilement que

$$P_2 = K e^{-r(T-t)} N(d_2).$$

Pour  $P_1$ , on a

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} \geq K} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{S e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} \geq K} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = SN(d_1). \end{aligned}$$

Pour calculer le ratio de couverture, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée pour dériver l'expression du prix sous le signe de l'espérance (il est également possible de dériver directement la formule de Black et Scholes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) &= \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S} \left( S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} - K \right)^+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_{T-t}} \mathbf{1}_{S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K} \right] = N(d_1). \end{aligned}$$

□

En utilisant la parité call-put, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 1.** *Le prix d'une option put européen de pay-off  $g(S) = (K - S)^+$  dans le modèle de Black-Scholes est donné par*

$$v(t, S) := P_{BS}(t, S) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - SN(-d_1).$$

*Le ratio de couverture (delta du put) est donné par*

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t, S) = N(d_1) - 1.$$

Dans le modèle de Black et Scholes, les calls sont donc croissants et les puts décroissants par rapport au prix du sous-jacent.

### 3.5 Les grecques

Pour comprendre le comportement des options en fonction de différents paramètres du modèle, on calcule les sensibilités du prix Black-Scholes par rapport à ces paramètres.

- Le *delta* est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle de l'actif sous-jacent :

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} = N(d_1), \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial S} = N(d_1) - 1.$$

C'est de loin le facteur de risque le plus important affectant le prix d'une option.

- Le *gamma* est défini comme la deuxième dérivée du prix ou bien la dérivée première du delta :

$$\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} N(d_1) = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{où } n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = N'(x).$$

Il a donc la double interprétation de la sensibilité du prix par rapport aux grandes variations et de la vitesse du changement de delta. Puisque le gamma est toujours positif, les prix des calls (et des puts) sont convexes en  $S$ . Le gamma d'une option est grand lorsque l'option est proche de la monnaie et / ou proche de l'échéance.

- Le *vega* est la sensibilité par rapport à la volatilité :

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{T-t}.$$

Les prix des calls et des puts sont donc croissants par rapport à la volatilité. Le vega est plus grand à la monnaie mais décroît pour les options qui sont proches de l'échéance. Un portefeuille de  $n$  options de prix  $C_1, \dots, C_n$  contenant  $w_i$  unités de  $i$ -ème option est gamma-neutre (respectivement, vega-neutre) si

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial S^2} = 0 \quad \text{respectivement} \quad \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial C_i}{\partial \sigma} = 0.$$

Dans le modèle de Black-Scholes, *si toutes les options ont la même échéance*, un portefeuille est gamma-neutre si et seulement s'il est vega-neutre.

- Le *rho* est la sensibilité par rapport au taux d'intérêt :

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) > 0, \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2) < 0.$$

Le call est donc croissant et le put décroissant par rapport au taux d'intérêt.

- Le *theta* mesure la sensibilité par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) < 0 \\ \frac{\partial P_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) \end{aligned}$$

Le theta du call est toujours négatif, mais celui du put peut être négatif ou positif, en fonction des paramètres. Pour les puts proches de la monnaie / proches de l'échéance le premier terme va dominer, donnant un theta négatif, mais pour les puts dans la monnaie c'est le deuxième terme qui risque de l'emporter et le theta sera positif.

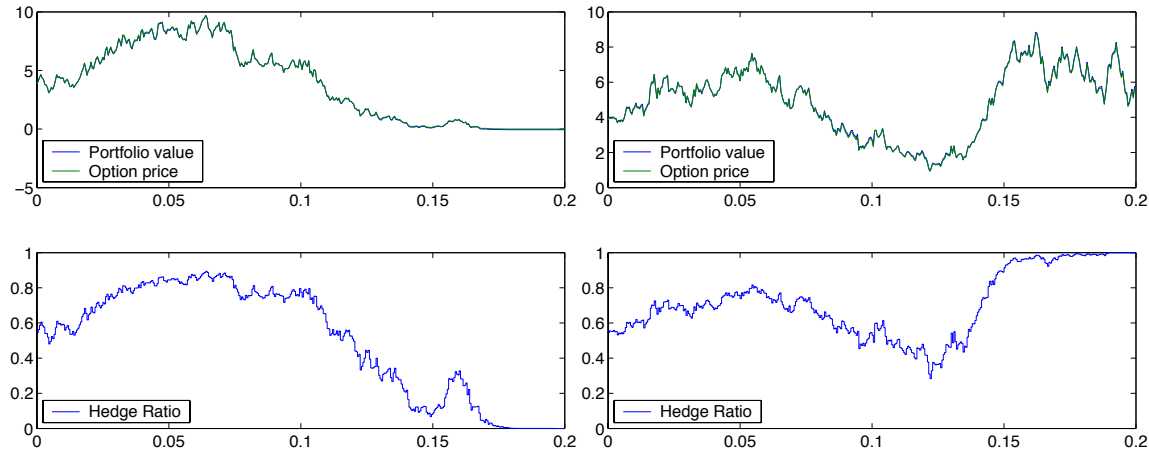


FIGURE 3.1 – Rebalancement continu du portefeuille de couverture (8 fois par jour). Gauche : P&L final = -0.05. Droite : P&L final = 0.08.

### 3.6 Discrétisation et couverture en gamma

Dans le modèle de Black-Scholes, pour que l'option soit complètement répliquée, le portefeuille de couverture doit être réajusté en continu. En pratique, il est bien entendu réajusté un nombre fini de fois, à des dates discrètes, ce qui conduit à une erreur de couverture (erreur de discrétisation). Figure 3.1 montre deux exemples d'évolution de portefeuille de couverture et de l'option qu'on cherche à répliquer dans le modèle de Black-Scholes avec rebalancement très fréquent (8 fois par jour) du portefeuille de couverture. De façon générale, à la fin de chaque trajectoire, le delta est égale soit à 0 si l'option termine hors de la monnaie soit à 1 si l'option termine dans la monnaie. Figure 3.2 montre l'effet d'une fréquence de rebalancement moins élevée : à gauche, le portefeuille est recalculé une fois par jour et à droite la couverture reste statique pendant toute la période (2 mois), ce qui conduit à une grande erreur de réplcation.

Pour quantifier l'erreur de discrétisation, écrivons la valeur de la différence entre la valeur actualisée d'une option européenne et le portefeuille de couverture correspondant. Avec un développement en série de Taylor d'ordre 1 en  $t$  et d'ordre 2 en  $\tilde{S}$ , pour  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) &= \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \{ \tilde{v}(t_i, \tilde{S}_{t_i}) - \tilde{v}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \} \\
&\approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta t_i + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta \tilde{S}_{t_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta \tilde{S}_{t_i}^2 \right\} \\
&\approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \Delta t_i + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S} \Delta \tilde{S}_{t_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 \Delta t_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i) \right\}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

En utilisant l'EDP de Black-Scholes et la forme explicite du portefeuille de réplcation, on obtient

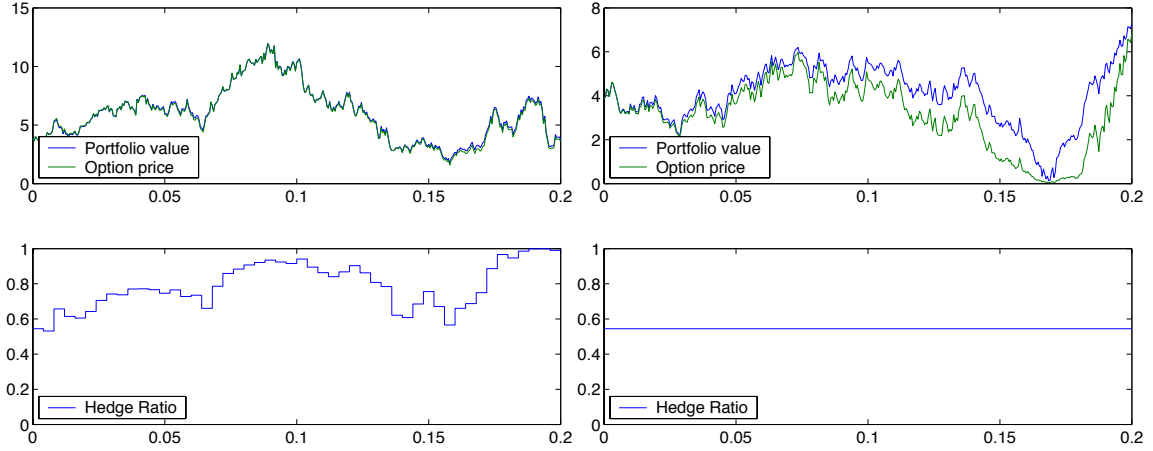


FIGURE 3.2 – Gauche : rebalancement journalier, P&L final = 0.18. Droite : couverture statique en delta, P&L final = 0.44.

le terme principal de l'erreur de couverture :

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) - \tilde{X}_T \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

ou bien, avec les quantités non actualisées,

$$v(T, S_T) - X_T \approx \frac{e^{rT}}{2} \sum_{i=1}^n e^{-rt_{i-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S_{t_{i-1}}^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

L'accroissement  $\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i$  est d'espérance nulle et de variance

$$\text{Var} [\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i] = 2\Delta t_i^2.$$

En divisant chaque accroissement par  $\sqrt{2\Delta t_i}$ , nous obtenons donc des accroissements i.i.d., centrés et de variance  $\Delta t_i$ . Par un théorème de limite centrale fonctionnel (c'est-à-dire qui permet d'obtenir la convergence non pas d'une suite de variables à une gaussienne mais d'une suite de processus vers le mouvement brownien), on obtient alors que

$$\sum_{t_i \leq t} \frac{1}{\sqrt{2\Delta t_i}} (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

en tant qu'un processus paramétré part  $t$ , converge en loi vers un mouvement brownien standard  $W^*$  indépendant de  $W$ , lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. On peut donc écrire de manière informelle, en supposant que le pas de discrétisation est constant et égal à  $\Delta t$ ,

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) - \tilde{X}_T \approx \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_t^2 \sigma_t^2 dW_t^*,$$

ou bien

$$v(T, S_T) - X_T \approx \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S_t^2 \sigma_t^2 dW_t^*. \quad (3.6)$$

L'erreur de couverture due à la discrétisation de la stratégie est donc proportionnelle au gamma de l'option et à la racine du pas de temps. Elle sera plus importante dans lorsque le gamma est élevé, c'est-à-dire, pour les options proches de la monnaie et/ou de l'échéance.

Pour réduire l'erreur de couverture, on peut soit augmenter la fréquence de réajustement, ce qui engendre des coûts de transaction, soit diminuer le gamma, en rajoutant au portefeuille des instruments de couverture adaptés (en général, des options liquides). Ceci n'est pas réaliste pour la couverture d'une seule option mais peut être tout à fait envisageable lorsqu'on souhaite couvrir un portefeuille contenant beaucoup d'options sur le même sous-jacent. Si la valeur du portefeuille d'options à couvrir est notée par  $v(t, S)$  et celle de l'actif de couverture par  $v_0(t, S)$ , pour que le portefeuille global soit gamma-neutre, il faut que la quantité de l'actif  $v_0$  soit égale à

$$\gamma_t = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}}{\frac{\partial^2 v_0}{\partial S^2}}.$$

On a donc intérêt à choisir l'actif de couverture dont le gamma est élevé.

**Optimisation de la fréquence de réajustement** En supposant que le coût par transaction est fixe et donné par  $\delta$ , et que la fréquence de réajustement est donnée par  $\omega_t$ , sur un petit intervalle  $[t, t + \Delta t]$  (qui contient tout de même plusieurs dates de réajustement) nous avons :

$$\text{Coût : } \delta \omega_t \Delta t \quad \text{Erreur : } \sqrt{\frac{\Delta t}{2\omega_t}} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(u, S_u) \sigma^2 S_u^2 dW_u^*$$

ce qui donne la fréquence optimale

$$\omega_t = \left( \frac{\Gamma_t^2 S_t^4 \sigma^4}{4\delta^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

L'erreur de discrétisation peut être réduite encore en réajustant le portefeuille aux dates stochastiques (qui sont déterminées par la déviation du portefeuille de sa valeur initiale).

## 3.7 Couverture en présence de coûts de transaction

L'hypothèse de coûts de transaction nuls n'est pas respectée en général, en pratique le trader fait face à des coûts multiples : le spread bid-ask, les frais imposés par la bourse etc. De plus, il n'est pas toujours possible d'acheter / vendre de grandes quantités d'actifs dont la liquidité est faible. En pratique, cependant, pour les actifs liquides et fréquences de réajustement pas trop élevées, les frais de transaction sont assez faibles.

En présence de coûts de transaction proportionnels ou fixes, quelle que soit leur taille, il est impossible de répliquer une option de manière exacte (Soner, Shreve et Cvitanic ?) : le prix de sur-couverture est égal au prix du sous-jacent lui-même. Leland ? propose une stratégie simple permettant de compenser les frais de transaction *en moyenne* en augmentant le prix de vente de l'option.

Supposons que le trader utilise le modèle de Black-Scholes de volatilité  $\bar{\sigma}$ . L'évolution approchée du P&L avec coût de transaction proportionnel  $k$ , et pour une position courte en option est donnée par,

$$\begin{aligned} \text{P\&L}_T &\approx P(0, S_0) + \sum \frac{\partial P}{\partial S} \Delta S_t + k \sum \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S_t |\Delta S_t| - P(T, S_T) \\ &\approx \frac{1}{2} \sum S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \sigma^2 (\Delta W_t^2 - \Delta t) + \sum S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \left\{ \frac{(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2) \Delta t}{2} - k \sigma |\Delta W_t| \right\} \end{aligned}$$

Pour annuler le P&L en moyenne, prenons la volatilité

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \frac{2k\sigma \mathbb{E}[|\Delta W_t|]}{\Delta t} \Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma \sqrt{1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{k}{\sigma \sqrt{\Delta t}}}$$

Sous la condition de Leland, l'erreur résiduelle vérifie

$$\text{P\&L}_T \approx \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T S_t^2 \sigma^2 \Gamma_t dW_t^* + k \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \int_0^T S_t^2 \sigma \Gamma_t dW_t',$$

où  $W^*$  et  $W'$  sont deux mouvements Browniens indépendants.

Pour faire tendre le coût additionnel vers 0 lorsque  $k \rightarrow 0$ , il faut choisir le pas de discrétisation de sorte que  $k = o(\sqrt{\Delta t})$ . Avec ce choix de  $k$  l'erreur de discrétisation domine l'erreur additionnelle due aux coûts de transaction.

On peut maintenant essayer d'équilibrer l'erreur de discrétisation (en moyenne quadratique) et l'erreur de couverture au carré :

$$\frac{\Delta t}{2} \int_0^T S_t^4 \sigma^4 \Gamma_t^2 dt \approx \left( \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)^2 \frac{2}{\pi} \frac{k^2}{\Delta t}$$

Le pas de discrétisation optimal est donc  $\Delta t \sim k$ .

### 3.8 Robustesse de la formule de Black et Scholes

La formule de Black-Scholes est souvent utilisée dans le marché même pour les actifs dont la volatilité n'est pas constante ni même déterministe. Cette pratique est partiellement justifiée par la propriété connue sous le nom de "robustesse de la formule de Black-Scholes" : même si la vraie volatilité du sous-jacent est stochastique, la formule de Black-Scholes peut être utilisée pour calculer les bornes supérieures / inférieures du prix, pourvu que la volatilité constante utilisée majore / minore la vraie volatilité.

Supposons que le prix d'action suit

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t,$$

où  $\sigma_t$  est un processus stochastique, et que l'agent calcule son portefeuille de couverture en utilisant la formule Black-Scholes avec volatilité constante  $\Sigma$ . L'évolution du portefeuille de l'agent est

$$d\tilde{X}_t = \Delta_{BS}(t, S_t) d\tilde{S}_t, \quad \tilde{X}_0 = \tilde{C}_{BS}(0, \tilde{S}_0).$$

L'erreur finale actualisée de couverture est donnée par la différence entre  $V_T$  et le payoff de l'option :

$$\tilde{\varepsilon}_T = \tilde{X}_T - \tilde{g}(\tilde{S}_T) = \tilde{X}_T - \tilde{C}_{BS}(T, \tilde{S}_T).$$

En appliquant la formule d'Itô on a alors

$$d\tilde{C}_{BS}(t, S_t) = \left( \frac{\partial \tilde{C}_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 \tilde{S}_t^2 \right) dt + \Delta_{BS}(t, S_t) dS_t,$$

mais  $\tilde{C}_{BS}(t, S)$  en tant qu'une fonction satisfait l'EDP de Black-Scholes :

$$\frac{\partial \tilde{C}_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \tilde{S}^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} = 0.$$

En rassemblant les trois équations, on trouve

$$\tilde{\varepsilon}_T = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma_t^2) \tilde{S}_t^2 dt.$$

ou bien

$$\varepsilon_T = X_T - g(S_T) = \frac{1}{2} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma_t^2) S_t^2 dt.$$

Si  $\Sigma \geq \sigma_t$  p.s., nous avons  $X_T \geq g(S_T)$  p.s. : le portefeuille de couverture Black-Scholes domine le prix de l'option et donc, le prix Black-Scholes domine le vrai prix. Dans ce sens précis, la formule de Black-Scholes est robuste aux misspécifications de la volatilité.

### 3.9 Volatilité implicite

Dans le modèle de Black et Scholes l'unique paramètre inobservable est la volatilité. La fonction,  $\sigma \mapsto C_{BS}(\sigma)$  qui à une valeur de volatilité associe le prix Black-Scholes correspondant, vérifie

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} C_{BS}(\sigma) = (S - Ke^{-r(T-t)})^+ \quad \lim_{\sigma \uparrow \infty} C_{BS}(\sigma) = S \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_1) \sqrt{T-t} > 0. \quad (3.8)$$

Ceci implique que l'équation  $C_{BS}(\sigma) = C$  a une unique solution pour toute valeur de  $C$  vérifiant les contraintes d'arbitrage

$$(S - Ke^{-r(T-t)})^+ < C < S$$

Cette solution peut facilement être calculée en utilisant l'algorithme de bisection pour la fonction  $x \in (0, 1) \mapsto C_{BS}\left(\frac{x}{1-x}\right)$  (le changement de variable permet de se ramener à un intervalle borné).

Le choix du nombre d'itérations  $N$  dépend de la précision souhaitée : par exemple,  $N = 20$  donnera une précision de l'ordre de  $10^{-6}$ . La convergence peut être accélérée par l'algorithme de Newton

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C - C_{BS}(\sigma_n)}{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)},$$

---

**Algorithm 1**  $\sigma = \text{Volatilité Implicite}(C)$ 


---

```

 $x_0 = 0$ 
 $y_0 = 1$ 
for  $i = 1 \rightarrow N$  do
   $z_i := \frac{1}{2}(x_{i-1} + y_{i-1})$ 
  if  $C > C_{BS}(\frac{z_i}{1-z_i})$  then
     $x_i := z_i$ 
     $y_i := y_{i-1}$ 
  else
     $x_i := x_{i-1}$ 
     $y_i := z_i$ 
  end if
end for
 $z := \frac{x_N + y_N}{2}$ 
 $\sigma := \frac{z}{1-z}$ 

```

---

pour lequel 3 – 4 itérations sont normalement suffisantes. Cependant, lorsque  $C$  est trop proche des bornes d'arbitrage, la dérivée  $\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)$  devient trop petite, ce qui peut conduire à des instabilités numériques. Dans ce cas il est préférable d'utiliser la méthode de bisection.

La solution  $I(C)$  de l'équation  $C_{BS}(\sigma) = C$ , où  $C$  est le prix d'une option européenne observé sur le marché s'appelle la *volatilité implicite* de cette option.

Le modèle de Black-Scholes implique que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique (écart type des rendements annualisé) du sous-jacent. Cependant, lorsqu'on calcule  $I$  à partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que

- La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité du sous-jacent.
- Les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

Le graphique gauche du fig. 3.3 trace les volatilités implicites des options sur l'indice S&P 500 en fonction de leur strike et maturité observés le 23 janvier 2006. On constate que

- Pour presque tous les strikes, la volatilité implicite décroît en fonction de strike (phénomène de *skew*).
- Pour des très grands strikes on observe parfois une légère remontée de la volatilité implicite (phénomène du *smile*).
- Les phénomènes de smile et skew sont le plus prononcés pour les options de courte maturité ; la courbe de volatilité implicite en fonction de strike s'aplatit pour les grandes maturités.

La différence entre la volatilité implicite et la volatilité historique du sous-jacent peut s'expliquer par le fait que la couverture d'une option est plus chère en réalité que dans le modèle de Black-Scholes, à cause, en particulier, des frais de transaction et de la nécessité de couvrir les sources de risque non pris en compte par ce modèle (e.g. le risque de volatilité). Le phénomène de skew est dû au fait que le modèle de Black-Scholes sous-estime la probabilité d'un krach boursier ou d'un grand mouvement de prix en général. Le traders corrigent cette probabilité en augmentant



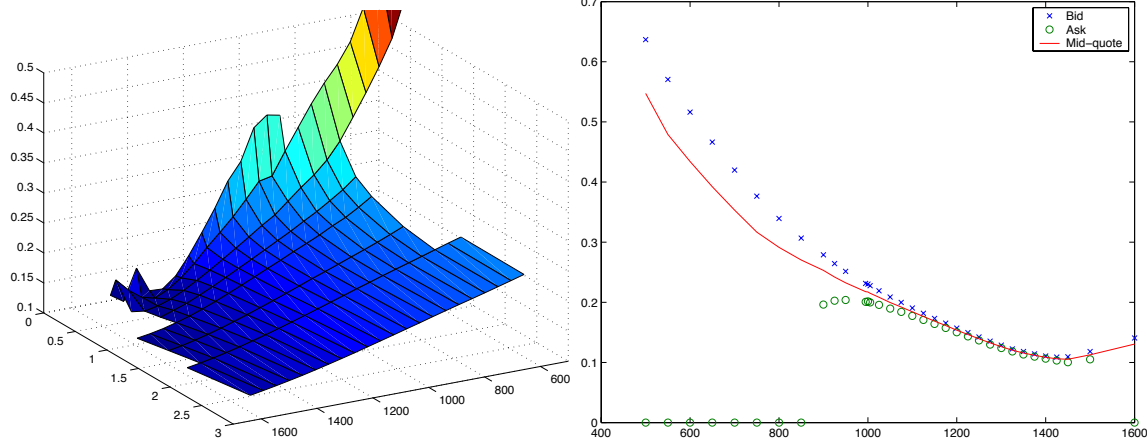


FIGURE 3.3 – Gauche : volatilité implicite des options sur S&P 500 en fonction de strikes et maturités. Droite : volatilités implicites pour une maturité donnée, calculées à partir des prix *bid* et *ask*.

les volatilités implicites des options loin de la monnaie. Finalement, le smile peut être expliqué par les primes de liquidité qui sont plus élevées pour les options loin de la monnaie. Le graphique droit du fig. 3.3 montre que les volatilités implicites des options loin de la monnaie sont presque exclusivement expliquées par les prix Bid (d'achat) qui ont des primes plus élevées pour ces options à cause d'une offre moins importante.

## Annexe : résumé des résultats du calcul stochastique utilisés dans ce chapitre

**Définition 2.** Soit  $W$  un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On dit que  $W$  est un mouvement brownien standard si

1.  $W_0 = 0$  et les trajectoires de  $W$  sont continues p.s.
2. Les accroissements de  $W$  sont indépendants : pour toute suite  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$  sont indépendants.
3. Pour tout  $t, s$  avec  $0 \leq s < t$ ,  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ .

**Intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien** Soit  $W$  un mouvement brownien par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$ , et  $\phi$  un processus mesurable  $\mathbb{F}$ -adapté tel que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \phi_t^2 dt \right] < \infty.$$

Alors l'intégrale stochastique  $\int_0^\infty \phi_t dW_t$  peut être définie comme l'unique limite dans  $L^2$  des intégrales des processus simples (constants par morceaux) qui approximent  $\phi$ . Cette intégrale vérifie

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \phi_t dW_t \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^\infty \phi_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \phi_t^2 dt \right].$$

De plus, on peut définir le processus stochastique

$$I_t \equiv \int_0^t \phi_s dW_s := \int_0^\infty \mathbf{1}_{s \leq t} \phi_s dW_s.$$

Ce processus est une martingale continue et vérifie

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \phi_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \phi_s^2 ds \right]. \quad (3.9)$$

pour tout  $t \geq 0$ . Si le processus  $\phi$  vérifie seulement

$$\int_0^\infty \phi_t^2 dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

on peut définir l'intégrale stochastique  $\int_0^t \phi_s dW_s$  par localisation, mais ce processus est seulement une martingale locale et ne vérifie pas nécessairement la relation (3.9).

**Processus d'Itô** On dit que  $X$  est un processus d'Itô s'il s'écrit sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dW_s \quad (3.10)$$

où  $\psi$  et  $\phi$  sont des processus mesurables  $\mathbb{F}$ -adaptés vérifiant

$$\int_0^\infty (|\psi_t| + \phi_t^2) dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

L'intégrale d'un processus  $\lambda$  par rapport à un processus d'Itô est définie par

$$\int_0^t \lambda_s dX_s := \int_0^t \lambda_s \psi_s ds + \int_0^t \lambda_s \phi_s dW_s$$

dès que les deux intégrales dans la partie droite de l'égalité sont bien définies.

**Proposition 1** (Formule d'Itô). *Soit  $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et  $W$  un mouvement brownien standard. Alors*

$$f(T, W_T) = f(0, 0) + \int_0^T \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t) \right) dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t) dW_t. \quad (3.11)$$

*Soit maintenant  $X$  un processus d'Itô à valeurs dans  $\mathbb{R}$  admettant la représentation (3.10). Alors*

$$f(T, X_T) = f(0, X_0) + \int_0^T \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right) \phi_t^2 dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t. \quad (3.12)$$

## Chapitre 4

# Volatilité locale et la formule de Dupire

- *Modèle à volatilité locale. Modèle CEV.*
- *Valorisation d'options dans les modèles à volatilité locale.*
- *EDP et formule de Dupire (en termes des prix d'options).*
- *Formule de Dupire en termes des volatilités implicites.*
- *Volatilité implicite dans la limite de très courte maturité.*
- *Paramétrisation SVI pour la volatilité implicite.*

### 4.1 Modèles à volatilité locale

Dans le chapitre précédent nous avons vu que le modèle de Black-Scholes à volatilité constante ne peut pas reproduire l'ensemble des prix d'options observés sur le marché pour un sous-jacent donné, car leur volatilité implicite varie en fonction du strike et de la maturité. Pour prendre en compte le smile du marché tout en restant dans le cadre markovien et complet (un seul facteur de risque) une solution naturelle est de modéliser la volatilité comme une fonction déterministe du temps et de la valeur du sous-jacent, ce qui signifie que la valeur du sous-jacent est la solution d'une équation différentielle stochastique.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad (4.1)$$

Dans la suite nous supposons toujours que l'équation (4.1) admet une unique solution forte. Par exemple, il suffit de supposer que  $S\sigma(t, S)$  est Lipschitz en  $S$  et à croissance sous-linéaire, mais dans les exemples spécifiques on peut démontrer l'existence d'une solution forte sous des conditions moins fortes.

Par analogie avec le modèle de Black-Scholes on considère l'équation de pricing

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = rv(t, S) - rS \frac{\partial v}{\partial S}, \quad v(T, S) = g(S). \quad (4.2)$$

Sous des conditions assez faibles (e.g.,  $\sigma$  Hölder continu en  $x$  et continu en  $t$ ,  $\sigma(t, x) \geq c > 0$  pour tout  $t, x$  et  $g$  continu - voir Friedman [2013]) on peut montrer que cette équation admet une solution  $C^{1,2}$ . Par le même argument d'autofinancement que dans le modèle Black-Scholes, on peut alors en déduire que le prix d'une option qui paie  $g(S_T)$  à l'instant  $T$  vérifie (4.2) et le portefeuille autofinçant de couverture contient  $\delta_t = \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$  actions. L'équation de pricing garde alors la même forme que dans le modèle de Black-Scholes mais on ne peut plus en déduire une formule explicite car la volatilité dépend maintenant du sous-jacent.

De même, par analogie au Théorème 5, on peut démontrer que l'unique solution de l'équation (4.2) dans la classe des fonctions régulières à croissance polynomiale s'écrit sous forme d'une espérance :

$$v(t, S) = E[e^{-\int_t^T r ds} g(\widehat{S}_T) | \widehat{S}_t = S], \quad (4.3)$$

où le processus  $\widehat{S}$  suit la dynamique modifiée

$$\frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t} = r dt + \sigma(t, \widehat{S}_t) dW_t.$$

## 4.2 Modèle CEV

Un exemple de modèle à volatilité locale bien étudié dans la littérature est donné par le modèle CEV (Constant Elasticity of Variance) de Cox [1996]. Dans ce modèle, la volatilité est une fonction puissance du niveau de sous-jacent :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \frac{\sigma_0}{S_t^{1-\alpha}} dW_t \quad (4.4)$$

Plaçons-nous sous la probabilité risque-neutre, et supposons dans un premier temps que le prix forward du sous-jacent  $F_t = e^{r(T-t)} S_t$  suit le modèle CEV :

$$dF_t = \sigma_0 F_t^\alpha dW_t, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.5)$$

Le modèle de Black-Scholes et le modèle gaussien sont des cas limites de cette équation avec  $\alpha = 1$  et  $\alpha \rightarrow 0$  respectivement. La valeur 0 est une barrière *absorbante*, si  $F_t = 0$  pour un  $t$ ,  $F_s \equiv 0$  pour tout  $s \geq t$ .

**Volatilité implicite** La forme de la volatilité implicite du modèle CEV est connue grâce à l'approximation asymptotique de Hagan and Woodward [1999] :

$$\sigma^{imp}(K, T) = \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}} \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{24} \left( \frac{F_0 - K}{F_m} \right)^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{24} \frac{\sigma_0^2 T}{F_m^{2-2\alpha}} + \dots \right\}. \quad (4.6)$$

avec  $F_m = \frac{1}{2}(F_0 + K)$ . Au premier ordre, on a donc  $\sigma^{imp}(K, T) \approx \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}}$  : la volatilité implicite a la même forme que la volatilité locale mais avec une pente à la monnaie 2 fois plus petite.

**Cas général** ( $\mu \neq 0$ ) Soit  $F_t^{(\mu)} := e^{\mu t} F_{\tau(t)}$ , avec  $\tau(t)$  un changement de temps déterministe à préciser. Alors

$$dF_t^{(\mu)} = \mu F_t^{(\mu)} dt + e^{\mu t} dF_{\tau(t)}.$$

On a par ailleurs

$$F_{\tau(t)} = \int_0^{\tau(t)} \sigma_0 F_s^\alpha dW_s = \int_0^t \sigma_0 F_{\tau(s)}^\alpha dW_{\tau(s)},$$

d'où

$$dF_{\tau(t)}^0 = \sigma_0 F_{\tau(t)}^\alpha \sqrt{\tau'(t)} dW_t = e^{-\alpha \mu t} \sqrt{\tau'(t)} \sigma_0 (F_t^{(\mu)}) dW_t.$$

Finalement, en choisissant  $\tau$  avec  $\tau'(t) = e^{2\mu(\alpha-1)t}$ , c'est-à-dire,

$$\tau(t) = \frac{1 - e^{2\mu(1-\alpha)t}}{2\mu(1-\alpha)t}$$

on retrouve l'équation (4.4).

**Complément technique sur le modèle CEV** L'existence de solution de l'équation (4.5) peut être établi en reliant le processus  $F$  avec le processus de Bessel. Soit  $(B^1, \dots, B^n)$  un mouvement brownien standard en dimension  $n$  et  $R_t^2 = \sum_{i=1}^n (B_t^i)^2$ . Il est facile de voir que

$$d(R_t^2) = 2R_t dW_t + n dt \tag{4.7}$$

où  $W$  est un nouveau mouvement brownien. En posant  $\rho_t = R_t^2$ , on a donc

$$d\rho_t = 2\sqrt{|\rho_t|} dW_t + n dt \tag{4.8}$$

et, pour  $n > 1$ ,

$$dR_t = dW_t + \frac{n-1}{2} \frac{dt}{R_t}.$$

On peut démontrer que l'équation (4.8) admet une solution forte pour des valeurs de  $n$  non entières, permettant de définir le processus de Bessel [Chesney et al., 2009] :

**Définition 3.** Soit  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $x \geq 0$ . L'unique solution forte de l'équation

$$\rho_t = x + \delta t + 2 \int_0^t \sqrt{\rho_s} dW_s$$

s'appelle le processus BESQ (Bessel squared) de dimension  $\delta$ . Le processus  $R_t = \sqrt{\rho_t}$  s'appelle le processus de Bessel de dimension  $\delta$ .

Soit  $\tau = \inf\{t : F_t = 0\}$  et posons  $X_t = \frac{1}{\sigma_0(1-\alpha)} F_t^{1-\alpha}$ . Par une application de la formule d'Itô, sur l'ensemble sur  $\{t < \tau\}$ ,

$$dX_t = dW_t - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)X_t} dt,$$

ce qui donne le lien entre CEV et le processus de Bessel.

La contrainte  $0 < \alpha \leq 1$  est imposée puisqu'on peut démontrer que pour  $\alpha > 1$ ,  $(F_t)$  est une martingale locale stricte, c'est-à-dire, pas une vraie martingale, ce qui peut conduire, par exemple, à la violation de la parité Call-Put et d'autres inconvénients. Montrons que pour  $0 < \alpha \leq 1$ , l'équation (4.5) définit une vraie martingale de carré intégrable sur  $[0, T]$  pour tout  $T < \infty$ . Pour cela il est suffisant de voir que

$$E \{ [F]_T \} = E \left\{ \sigma_0^2 \int_0^T F_t^{2\alpha} dt \right\} < \infty. \quad (4.9)$$

Soit  $\tau_n = \inf\{t : F_t \geq n\}$ .  $F_{T \wedge \tau_n}$  est alors de carré intégrable, et on a, pour  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$$E[F_{\tau_n \wedge T}^2] = \sigma_0^2 E \left[ \int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt \right] \leq \sigma_0^2 E \left[ \int_0^{\tau_n \wedge T} (1 + F_t^2) dt \right] \leq \sigma_0^2 E \left[ \int_0^T (1 + F_{t \wedge \tau_n}^2) dt \right]$$

Par le lemme de Gronwall on a alors

$$\sigma_0^2 E \left[ \int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt \right] = E[F_{\tau_n \wedge T}^2] \leq \sigma_0^2 T e^{\sigma_0^2 T},$$

d'où (4.9) est déduit par convergence monotone.

### 4.3 Valorisation d'options dans les modèles à volatilité locale

Dans le modèle de volatilité locale, le prix d'une option européenne vérifie l'équation (4.2) qui n'admet pas de solution explicite. Cependant, cette équation n'a que deux dimensions : le temps et l'espace, et est donc facile à résoudre par un algorithme de discrétisation déterministe (méthode de différences finies). Pour commencer, introduisons une nouvelle variable  $x = \log \frac{s}{s_0} + r(T - t)$  et une nouvelle fonction inconnue  $u(t, x) = e^{r(T-t)} C(t, s_0 e^{x-r(T-t)})$ . L'équation (4.2) devient alors

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, x) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \quad t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

où  $\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, e^{x-r(T-t)})$ . On discrétise cette équation sur un domaine bornée rectangulaire  $[0, T] \times [-A, A]$  avec une grille équidistante en temps  $t_n = n\Delta t$ ,  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  et en espace  $x_m = -A + m\Delta x$ ,  $\Delta x = \frac{2A}{M}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . La solution approchée au point  $(t_n, x_m)$  sera notée  $\hat{u}_{n,m}$ . Pour  $m = 1, \dots, M-1$ , les dérivées en espace sont approchées par les différences centrées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t_n, x_m)}{\partial x} &\approx \frac{u(t_n, x_{m+1}) - u(t_n, x_{m-1})}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial x^2} &\approx \frac{u(t_n, x_{m+1}) - 2u(t_n, x_m) + u(t_n, x_{m-1}))}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Aux bords du domaine, pour  $m = 0$  et  $m = M$ , on doit préciser les conditions aux limites. Prenons des conditions de type Dirichlet, c'est-à-dire  $u(t, x) = g(t, x)$  pour  $x = -A$  et  $x = A$ . Cela signifie

qu'au lieu de résoudre l'équation (4.10) on résout en effet une autre équation sur le domaine tronqué :

$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, x) \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right\}, \quad t \in [0, T], x \in (-A, A) \quad (4.11)$$

avec les conditions aux limites  $\hat{u}(t, -A) = g(t, -A)$ ,  $\hat{u}(t, A) = g(t, A)$ ,  $t \in [0, T]$ .

La dérivée en temps est approchée par la différence 'un pas en arrière' :

$$\frac{\partial u(t_n, x_m)}{\partial t} \approx \frac{u(t_n, x_m) - u(t_{n-1}, x_m)}{\Delta t}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

La condition terminale est donnée par le pay-off de l'option :  $u(t_N, x_m) = \tilde{h}(x_m)$  pour  $m = 0, \dots, M$ , où  $\tilde{h}(x) = h(s_0 e^x)$ . En substituant ces approximations dans l'équation, on obtient une équation en différences pour  $\hat{u}_{n,m}$  :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n-1,m} = \hat{u}_{n,m} \left\{ 1 - \frac{\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t}{\Delta x^2} \right\} + \hat{u}_{n,m+1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left( 1 - \frac{\Delta x}{2} \right) \\ + \hat{u}_{n,m-1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left( 1 + \frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec les conditions aux bords  $\hat{u}_{n,0} = g(t_n, x_0)$  et  $\hat{u}_{n,M} = g(t_n, x_M)$  pour  $n = 0, \dots, N$  et la condition terminale  $\hat{u}_{N,m} = \tilde{h}(x_m)$  pour  $m = 1, \dots, M-1$ . Cette équation se résout en arrière, en commençant par la valeur terminale  $n = N$  et en procédant jusqu'à  $n = 0$ . Le schéma donne  $\hat{u}_{n-1,\cdot}$  explicitement en termes de  $\hat{u}_{n,\cdot}$ , et pour cette raison s'appelle *le schéma explicite*.

Pour éviter l'explosion des erreurs numériques, le schéma de discrétisation doit être *stable*. Cette propriété signifie que si la condition terminale est bornée par une constante  $C$ , la solution à toute date doit être bornée par la même constante. En regardant l'équation (4.12), on voit que ce schéma sera stable si tous les coefficients à droite sont positifs. Supposant que  $\Delta x < 2$ , cette propriété est vérifiée si la condition suivante dite condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est vérifiée pour tous  $(t, x) \in [0, T] \times [-A, A]$  :

$$\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t < \Delta x^2.$$

On dit que le schéma explicite est *conditionnellement* stable : le pas de temps doit être suffisamment petit comparé au pas d'espace. En pratique, cela nécessite de choisir le pas de temps très petit et augmente le temps de calcul. Une autre possibilité est d'approcher la dérivée en temps par la différence 'un pas en avant' :

$$\frac{\partial u(t_n, x_m)}{\partial t} \approx \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m)}{\Delta t}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Cette approximation correspond au *schéma implicite* :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n,m} = \hat{u}_{n-1,m} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\sigma}^2(t_{n-1}, x_m) \Delta t}{\Delta x^2} \right\} - \hat{u}_{n-1,m+1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_{n-1}, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left( 1 - \frac{\Delta x}{2} \right) \\ - \hat{u}_{n-1,m-1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_{n-1}, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left( 1 + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dans ce schéma la fonction inconnue  $\hat{u}_{n-1,\cdot}$  doit être calculée à partir de  $\hat{u}_{n,\cdot}$  par inversion de matrice. Le schéma implicite est *inconditionnellement* stable.

Lorsque l'équation (4.11) admet une solution classique régulière, on peut montrer qu'à la fois le schéma explicite (sous la condition CFL) et le schéma implicite sont des schémas d'ordre 1 en temps et ordre 2 en espace, ce qui signifie que la différence entre la vraie solution et l'approximation vérifie

$$|\hat{u}(t_n, x_m) - \hat{u}_{n,m}| = O(\Delta t + \Delta x^2).$$

**Conditions aux limites** Le choix de la taille du domaine  $A$  et des conditions aux limites dépend de la fonction pay-off  $h$  et de la fonction de volatilité. Pour simplifier, supposons que la volatilité est bornée par une constante  $\bar{\sigma}$  et que la fonction pay-off  $h$  est convexe. Alors par la robustesse de la formule de Black-Scholes, la fonction  $u(t, x)$  admet les bornes suivantes pour tout  $t, x$  :

$$\tilde{h}(x) \leq u(t, x) \leq u^{\bar{\sigma}}(t, x),$$

où  $u^{\bar{\sigma}}(t, x)$  est la solution de (4.10) avec volatilité constante  $\bar{\sigma}$ . D'un autre côté, la solution de l'équation tronquée  $\hat{u}$  admet la représentation probabiliste suivante :

$$\hat{u}(t, x) = \mathbb{E}[\tilde{h}(X_T^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau(t,x) > T} + g(\tau^{(t,x)}, X_{\tau^{(t,x)}}^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau(t,x) \leq T}],$$

où  $X^{(t,x)}$  est le processus de diffusion vérifiant l'EDS

$$X_s^{(t,x)} = x - \frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(r, X_r^{(t,x)}) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{(t,x)}) dW_r, \quad s \geq t,$$

et  $\tau^{(t,x)} = \inf\{s \geq t : X_s^{(t,x)} \notin [-A, A]\}$ . Cela montre que  $\hat{u}(t, x)$  est croissant en la condition aux bords. Comme par ailleurs

$$u(t, x) = \mathbb{E}[\tilde{h}(X_T^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau(t,x) > T} + u(\tau^{(t,x)}, X_{\tau^{(t,x)}}^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau(t,x) \leq T}],$$

la vraie solution se situe entre les bornes suivantes :

- $u(t, x)$  est bornée supérieurement par la solution à (4.11) avec condition aux bords  $g(t, x) = u^{\bar{\sigma}}(t, x)$  (qui peut être calculée explicitement avec la formule de Black-Scholes).
- $u(t, x)$  est bornée inférieurement par la solution à (4.11) avec condition aux bords  $g(t, x) = \tilde{h}(x)$ .

Cela donne un algorithme pour choisir la taille du domaine  $A$  : augmenter  $A$  jusqu'à ce que les deux bornes deviennent suffisamment proches dans la région d'intérêt.

## 4.4 Equation et formule de Dupire

Rappelons que dans un modèle de volatilité locale le prix d'une option qui paie  $g(S_T)$  à l'instant  $T$  satisfait

$$rv(t, S) = \frac{\partial v}{\partial t} + rS \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}, \quad v(T, S) = g(S). \quad (4.14)$$

Ceci est une équation *backward*, car on lui associe une condition terminale et l'équation se résout sur l'intervalle  $[t, T]$  dans la direction  $T \rightarrow t$ . Cette équation est vérifiée par le prix de toute option



européenne, pas nécessairement call ou put. Elle permet de calculer le prix d'une option en fonction de la date d'observation  $t$  et de la valeur actuelle du sous-jacent  $S_t$ .

Notre objectif maintenant est de trouver une fonction de volatilité locale  $\sigma(t, S)$  qui reproduit, à une date donnée, les prix observés des calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Equation (4.14) ne permet pas de reconstruire la volatilité locale en écrivant

$$\sigma^2(t, S) = \frac{rv - \frac{\partial v}{\partial t} - rS \frac{\partial v}{\partial S}}{\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}},$$

car à une date donnée, les valeurs de  $t$  et  $S$  sont fixées, et on ne peut pas calculer les dérivées partielles. La solution à ce problème a été donnée par Bruno Dupire [Dupire, 1994] qui a proposé une méthode pour calculer  $\sigma(t, S)$  à partir d'une observation des prix d'options (pour tous strikes et maturités) à une date donnée. Plus précisément, il a démontré le résultat suivant.

Dans un modèle à volatilité locale, les prix de calls  $C(t, S_t, T, K)$  vérifient l'équation forward (avec condition initiale), appelée equation de Dupire :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad C(t, S_t, T, K) = (S_t - K)^+$$

Cette équation s'applique uniquement aux prix des options Call, qui sont cette fois considérés comme fonctions du strike  $K$  et de la maturité  $T$ . Comme à une date donnée on peut observer les prix d'options de plusieurs strikes et maturités, cette équation peut être utilisée pour recalculer la fonction de volatilité  $\sigma(\cdot, \cdot)$  à partir des prix d'options.

Dans un modèle de volatilité locale, la fonction de volatilité  $\sigma$  peut être retrouvée de façon unique avec la formule de Dupire :

$$\sigma(T, K) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \quad (4.15)$$

Le fait qu'on puisse retrouver de façon unique un processus markovien continu à partir des prix d'options européennes n'implique pas qu'il n'y a pas d'autres modèles (non markoviens ou non continus) qui évaluent les options européennes de la même façon. La connaissance des prix des options européennes détermine les distributions marginales du processus, mais la loi du processus ne se limite pas à ces distributions marginales.

**Théorème 7.** Soit  $(S_t)_{t_0 \leq t}$  une solution de l'EDS

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad S_{t_0} = S_0.$$

Supposons que

1.  $S_t$  vérifie :

$$E \left[ \int_{t_0}^T S_t^2 \sigma^2(t, S_t) dt \right] < \infty, \quad \forall T$$

2. Pour chaque  $t > t_0$ , la variable aléatoire  $S_t$  a une densité  $p(t, x)$ , continue sur  $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$ .

3. Le coefficient de diffusion  $\sigma(t, x)$  est continu sur  $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$ .

Alors la fonction de prix d'une option call

$$C(T, K) = e^{-r(T-t_0)} E[(S_T - K)^+].$$

satisfait l'équation de Dupire

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad (T, K) \in [t_0, \infty) \times [0, \infty) \quad (4.16)$$

avec condition initiale  $C(t_0, K) = (S_0 - K)^+$ .

*Preuve.* La démonstration repose sur l'application de la formule d'Itô à la semimartingale  $e^{-rt}(S_t - K)^+$ . Puisque la fonction  $f(x) = x^+$  n'est pas  $C^2$ , la formule d'Itô classique ne s'applique pas directement. Une solution possible [El Karoui] consiste à utiliser la formule de Meyer-Itô pour les fonctions convexes [Protter, 1990]. Ici, nous adoptons une autre approche qui consiste à régulariser  $f$  en introduisant la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{(x + \varepsilon/2)^2}{2\varepsilon} 1_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + x 1_{x > \varepsilon/2}.$$

Il est clair que  $f_\varepsilon$  est 2 fois différentiable et différente de  $f$  seulement si  $|x| < \varepsilon/2$ . De plus, on a

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{x + \varepsilon/2}{\varepsilon} 1_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + 1_{x > \varepsilon/2}, \quad f''_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} 1_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2}.$$

L'application de la formule d'Itô standard à  $e^{-rt} f_\varepsilon(S_t - K)$  entre  $T$  et  $T + \theta$  donne

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)} f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K) - e^{-rT} f_\varepsilon(S_T - K) &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f_\varepsilon(S_t - K) dt \\ &+ \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f'_\varepsilon(S_t - K) dS_t + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f''_\varepsilon(S_t - K) \sigma^2(t, S_t) S_t^2 dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

En prenant l'espérance de chaque terme dans (4.17) sous l'hypothèse 1 ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)} E[f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K)] - e^{-rT} E[f_\varepsilon(S_T - K)] &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[f_\varepsilon(S_t - K)] dt \\ &+ \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[f'_\varepsilon(S_t - K) S_t] r dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} (K+x)^2 \sigma^2(t, K+x) p(t, K+x) dt, \end{aligned} \quad (4.18)$$

En utilisant l'hypothèse 2 ci-dessus, on peut passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} &C(T + \theta, K) - C(T, K) \\ &= -r \int_T^{T+\theta} C(t, K) dt + r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[S_t 1_{S_t \geq K}] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K) K^2 p(t, K) dt \\ &= rK \int_T^{T+\theta} e^{-rt} P[S_t \geq K] dt + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K) K^2 p(t, K) dt. \end{aligned}$$

En divisant les deux parties par  $\theta$  et en passant à la limite  $\theta \rightarrow 0$ , ceci donne

$$\frac{\partial C}{\partial T} = rKe^{-rT}P[S_T \geq K] + \frac{1}{2}e^{-rT}\sigma^2(T, K)K^2p(T, K).$$

Finalement, en observant que

$$e^{-rT}P[S_T \geq K] = -\frac{\partial C}{\partial K} \quad \text{et} \quad e^{-rT}p(T, K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2},$$

on trouve l'équation de Dupire. □

**Modèle à volatilité locale comme projection markovienne** Soit  $(S_t)_{t_0 \leq t}$  un processus d'Itô général de la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dW_t, \quad S_{t_0} = S_0$$

avec  $\sigma_t$  aléatoire, et supposons que  $\sigma^2(t, x) = E[\sigma_t^2 | S_t = x]$  vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus. En suivant la preuve étape par étape, il est facile de se convaincre que les prix des options dans le modèle associé à  $(S_t)$  vérifient l'équation de Dupire avec volatilité  $\sigma(t, x)$ . Autrement dit, la fonction de volatilité  $\sigma^2(t, x) = E[\sigma_t^2 | S_t = x]$  définit une diffusion markovienne qui a les mêmes prix d'options européennes et donc les mêmes lois marginales que  $(S_t)$ . Cette diffusion s'appelle la *projection markovienne* de  $(S_t)$ .

Théorème 7 permet de retrouver le coefficient de volatilité à partir d'un ensemble complet de prix de calls à une date donnée, *si on sait que ces prix proviennent d'un modèle de volatilité locale*. Il ne permet pas directement de répondre à la question suivante : étant donné un système de prix de calls  $(C(T, K))_{T \geq 0, K \geq 0}$ , est-ce qu'il existe un modèle de diffusion continu permettant de reproduire ces prix ? Pour appliquer la formule de Dupire (4.15) on a besoin au moins de supposer  $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} > 0$  et  $\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} \geq 0$ . Ces contraintes correspondent aux contraintes d'arbitrage de positivité d'un *butterfly spread* et d'un *calendar spread* respectivement (voir section 2.2).

*Exemple 3.* Figure 4.1 montre les résultats d'application de la formule de Dupire aux données artificielles (gauche) et aux prix réels d'options sur l'indice S&P 500. Alors que sur les données simulées, la formule de Dupire permet de retrouver une surface de volatilité locale qui paraît cohérent, la performance pour les données réelles n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons :

- Les prix de marché ne sont pas connus pour tous les strikes et toutes les maturités. Ils doivent donc être interpolés et le résultat final sera très sensible à la méthode d'interpolation utilisée.
- Du fait de la nécessité de calculer la deuxième dérivée de la fonction de prix d'option  $C(T, K)$ , les petites erreurs de données conduisent à des très grands erreurs sur la solution (problème mal posé). On reviendra sur ce point dans la section 4.6.

## 4.5 Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale

**Lien entre volatilité locale et volatilité implicite** La formule de Dupire (4.15) peut être réécrite en terme de volatilités implicites du marché, en observant que pour toute option on a

$$C(T, K) = C_{BS}(T, K, I(T, K)),$$

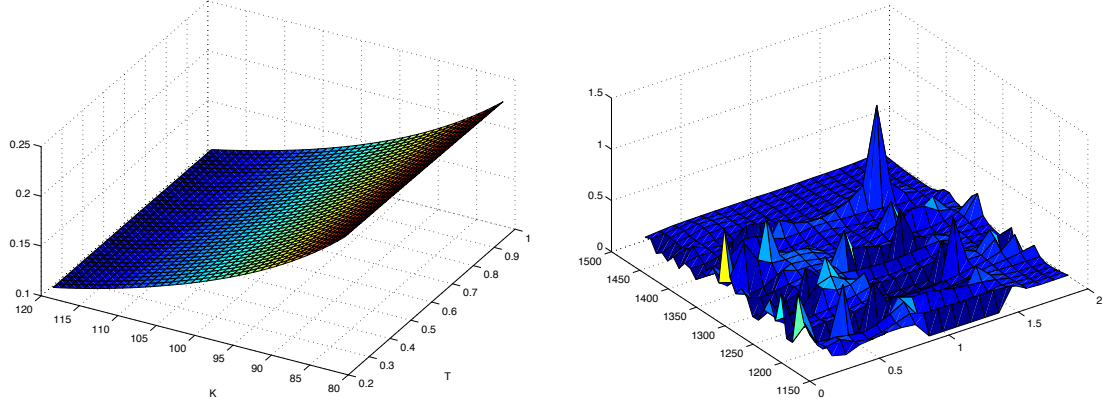


FIGURE 4.1 – Exemple de diffusion implicite. Gauche : données artificielles : la volatilité implicite est de la forme  $I(K) = 0.15 \times \frac{100}{K}$  pour toutes maturités ( $S_0 = 100$ ). Droite : données d'options sur S&P 500, interpolation par splines.

où  $C_{BS}(T, K, \sigma)$  dénote la formule Black-Scholes pour le prix d'une call de volatilité  $\sigma$  et  $I(T, K)$  est la volatilité implicite observée pour maturité  $T$  et strike  $K$ . Il sera plus pratique d'exprimer le prix en terme de *log-moneyness*  $x = \log(S/K) - rT$ , avec  $I(T, K) = \tilde{I}(T, x)$  et  $\sigma(T, K) = \tilde{\sigma}(T, x)$  et volatilité implicite sans dimension  $v(T, x) = \tilde{I}(T, x)\sqrt{T}$ . On a alors

$$\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial T} = Sn(d_1) \frac{\partial v}{\partial T} \quad (4.19)$$

et

$$K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = Sn(d_1) \left\{ v''_{xx} - \frac{v}{4}(v'_x)^2 + \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{xv'_x}{v} \right)^2 \right\}, \quad (4.20)$$

ce qui donne finalement la formule de Dupire en terme de volatilités implicites

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2(T, x) &= \frac{2vv'_T}{vv''_{xx} - \frac{v^2}{4}(v'_x)^2 + \left(1 - \frac{xv'_x}{v}\right)^2} \\ &= \frac{2\tilde{I}T\tilde{I}'_T + \tilde{I}^2}{\tilde{I}T\tilde{I}''_{xx} - \frac{\tilde{I}^2T^2}{4}(\tilde{I}'_x)^2 + \left(1 - \frac{x\tilde{I}'_x}{\tilde{I}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pour tirer quelques conclusions de cette formulation, dans un premier temps supposons que la volatilité implicite ne dépend pas de strike (absence de smile). Dans ce cas la volatilité locale ne dépend pas non plus de strike et la formule (4.21) se réduit à

$$\sigma^2(T) = I^2(T) + 2I(T)T \frac{\partial I}{\partial T},$$

d'où

$$I^2(T) = \frac{\int_0^T \sigma^2(s) ds}{T},$$

la volatilité implicite est donc égale à la moyenne quadratique de la volatilité locale sur la durée de vie de l'option.

En supposant que  $I$  et ses dérivées restent finis lorsque  $T \rightarrow 0$ , dans cette limite, l'équation (4.21) devient

$$\tilde{I}^2(0, x) = \tilde{\sigma}^2(0, x) \left( 1 - \frac{x}{\tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x} \right)^2.$$

Cette équation différentielle se résout explicitement :

$$\tilde{I}(0, x) = \left\{ \int_0^1 \frac{dy}{\tilde{\sigma}(0, xy)} \right\}^{-1}. \quad (4.22)$$

Nous avons donc démontré que, *dans la limite de très courte maturité, la volatilité implicite est égale à la moyenne harmonique des volatilités locales*, un résultat établi dans Berestycki et al. [2002]. Lorsque la volatilité locale  $\sigma(0, x)$  est différentiable en  $x = 0$ , équation (4.22) permet de démontrer que (le calcul est laissé au lecteur)

$$\frac{\partial \tilde{I}(0, 0)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}(0, 0)}{\partial x},$$

la pente à la monnaie de la volatilité locale est égale, pour les courtes maturités, à 2 fois la pente à la monnaie de la volatilité implicite.

## 4.6 Calibration de la volatilité locale

L'équation de Dupire (4.16) définit l'opérateur de pricing  $\sigma(*, *) \mapsto C(*, *)$ , qui à une fonction de volatilité locale donnée associe l'ensemble des prix de calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Inversement, si on observe tous les prix d'options pour tous les strikes et maturités, on peut reconstruire, grâce à la formule de Dupire (4.15). En pratique, on ne dispose que d'un nombre fini de strikes et maturités, et l'opération inverse qui consiste à reconstruire  $\sigma(t, S)$  pour tout  $t, S$  à partir d'un nombre fini de prix  $C_M(T_i, K_i), i = 1 \dots N$ , devient un problème mal posé (cf. exemple 3). Pour résoudre cette difficulté, on peut utiliser l'interpolation de la volatilité implicite par une forme paramétrique ou semiparamétrique. Les méthodes d'interpolation complètement nonparamétriques (comme les splines) ont en général une performance assez médiocre pour ce type de problèmes.

### 4.6.1 Interpolation de la volatilité implicite

La paramétrisation suivante pour la volatilité implicite en fonction du paramètre de log-strike  $k = \log \frac{K}{S} - rT$  a été proposée par Jim Gatheral [Gatheral, 2004] (voir également Zeliade), sous le nom de SVI (stochastic volatility inspired) : pour une échéance donnée, la variance implicite totale sans dimension  $V(T, k) = I^2(T, k)T$  vérifie

$$V(k) = a + b\{\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}\}$$

avec  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\rho \in [-1, 1]$  et  $m \in \mathbb{R}$ . Ici,

- $a$  contrôle le niveau global du smile ;
- $b$  contrôle la pente des ailes ;
- $\rho$  contrôle l'asymétrie, "rotation" du smile ;
- $m$  correspond à une translation ;
- $\sigma$  contrôle la convexité à la monnaie.

La forme paramétrique SVI doit être calibrée séparément pour chaque échéance disponible. Ensuite, on peut définir la volatilité implicite aux dates intermédiaires par interpolation. Une fois l'interpolation trouvée pour chaque  $k$  et  $T$ , la volatilité locale peut être calculée par la formule de Dupire, qui s'écrit en termes de  $V$  :

$$\sigma(T, k) = \frac{\frac{\partial V(T, k)}{\partial T}}{\left(1 - \frac{k}{2V} \frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} - \frac{1}{4V} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2}. \quad (4.23)$$

#### 4.6.2 Conditions d'absence d'arbitrage

La paramétrisation SVI peut a priori conduire à des opportunités d'arbitrage statiques, telles que les prix d'options non convexes en fonction du strike. Dans la suite de cette section, nous donnerons les conditions d'absence d'arbitrage pour une surface des prix d'options et pour une surface de volatilité implicite.

**Définition 4.** Une surface de prix d'options  $(T_i, K_i, C_i)_{i \in I}$  est *sans arbitrage* s'il existe un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  et une  $\mathbb{F}$ -martingale positive  $X$  telle que  $C_i = \mathbb{E}[(X_{T_i} - K_i)^+]$  pour tout  $i \in I$ .

**Surfaces de prix d'options sans arbitrage** Le résultat suivant, dû à Roper Roper [2010] établit les conditions nécessaires et suffisantes pour un surface de prix d'options sans arbitrage. Pour simplifier la discussion, on suppose que le taux d'intérêt est nul.

**Proposition 2.** Soit  $s > 0$  une constante et soit  $C : [0, \infty) \times [0, \infty)$  une surface de prix d'options vérifiant les conditions suivantes :

1. *Convexité en  $K$  (positivité des butterfly spreads) :* pour tout  $T \geq 0$ ,  $C(T, \cdot)$  est convexe.
2. *Monotonie en  $T$  (positivité des calendar spreads) :* pour tout  $K \geq 0$ ,  $C(K, \cdot)$  est croissant.
3. *Bornes :*

$$(s - K)^+ \leq C(T, K) \leq s \quad \forall K \geq 0, \forall T \geq 0.$$

4. *Valeur à l'échéance :*

$$C(0, K) = (s - K)^+ \quad \forall K > 0.$$

5. *Limite de grands strikes :*

$$\lim_{K \rightarrow \infty} C(T, K) = 0 \quad \forall T \geq 0.$$

Alors la surface  $(C(T, K))_{T \geq 0, K \geq 0}$  est sans arbitrage.

Inversement, si  $X$  est une martingale positive avec  $X_0 = s$  alors la fonction  $C(T, K) = \mathbb{E}[(X_T - K)^+]$  vérifie les conditions 1-5 ci-dessus.

*Idée de la preuve.* Choisissons  $T \geq 0$  et posons  $F_T(x) = 1 + C'_+(T, x)$  pour  $x \geq 0$  et  $F_T(x) = 0$  pour  $x < 0$ , où  $C'_+(T, x)$  est la dérivée à droite de  $C$  par rapport à son premier argument, qui existe pour tout  $x$  et  $T$  puisque  $C(T, \cdot)$  est convexe. La convexité implique également que  $F_T(x)$  est continu à droite et croissant en  $x$ . De plus, par la propriété 5 et la convexité, la fonction  $F_T(x)$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_T(x) = 1$  et la propriété 3 avec la convexité implique que  $F_T(x)$  est borné inférieurement par 0. Autrement dit,  $F_T(x)$  est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité  $\mu_T$  à support sur  $[0, \infty)$ , et on peut écrire, pour tout  $K, T \geq 0$ ,

$$C(K, T) = s - \int_{[0, \infty)} (x \wedge K) \mu_T(dx),$$

ce qui implique, en utilisant la convergence dominée et la propriété 5, que

$$C(K, T) = \int_{[0, \infty)} (x - K)^+ \mu_T(dx).$$

La monotonie de  $C(x, T)$  par rapport à  $T$  pour  $x$  fixé signifie que la famille des mesures de probabilité  $(\mu_T)_{T \geq 0}$  est croissante en ordre convexe, et le théorème de Kellerer permet alors de conclure qu'il existe une martingale  $X$  avec lois marginales données par  $(\mu_T)_{T \geq 0}$ .

Pour montrer l'implication inverse, on vérifie directement les propriétés 1–5 pour une martingale positive  $X$ .  $\square$

**Surfaces de volatilité implicite sans arbitrage** En utilisant la proposition 2, Roper Roper [2010] obtient une condition suffisante pour une *surface de volatilité implicite* sans arbitrage. Nous allons exprimer ces conditions en termes de log-moneyness  $x$  et la volatilité implicite sans dimension  $v(T, x)$  introduite ci-dessus. Ces conditions ne changent pas en présence d'un taux d'intérêt constant.

**Proposition 3.** *Soit  $s > 0$  et supposons que la fonction  $v : [0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  vérifie les conditions suivantes :*

1. *Différentiabilité :  $T > 0$ ,  $v(T, \cdot)$  est différentiable deux fois.*
2. *Condition de Durrleman : pour tout  $T > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$vv''_{xx} - \frac{v^2}{4}(v'_x)^2 + \left(1 - \frac{xv'_x}{v}\right) \geq 0.$$

3. *Monotonie en  $T$  : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v(\cdot, x)$  est croissant.*
4. *Positivité : pour tout  $T > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v(T, x) > 0$ .*
5. *Valeur à l'échéance : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v(0, x) = 0$ .*
6. *Limite de grand strike : pour tout  $T > 0$ ,*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} d_+(x, v(T, x)) = -\infty,$$

$$\text{où } d_{\pm}(x, v) := \frac{x}{v} \pm \frac{v}{2}.$$

Alors la surface des prix d'options définie par

$$\tilde{C}(T, x) = sN(d_+(x, v(T, x))) - se^{-x}N(d_-(x, v(T, x)))$$

est sans arbitrage.

*Démonstration.* On peut vérifier directement que sous l'hypothèse de différentiabilité, les propriétés 2–6 impliquent les propriétés correspondantes de la surface des prix d'options. En particulier, la condition de Durrleman et la monotonie en  $T$  assurent la positivité des butterfly et calendar spread, et la dernière condition assure que le prix du call converge vers zéro dans la limite du grand strike.  $\square$

**Paramétrisation arbitrage-free SSVI de Gatheral et Jacquier** Gatheral and Jacquier [2012] proposent la paramétrisation suivante pour toute la nappe de volatilité implicite sous le nom de Surface SVI (SSVI) :

$$V(t, k) = \frac{\theta_t}{2} \left\{ 1 + \rho\phi(\theta_t)k + \sqrt{(\phi(\theta_t)k + \rho)^2 + 1 - \rho^2} \right\}. \quad (4.24)$$

Ici,  $\theta_t = V(t, 0)$  est la variance implicite totale à la monnaie, déduite directement de la nappe du marché. Le paramètre  $\rho$  contrôle l'asymétrie du smile ; pour  $\rho = 0$ , le smile est symétrique à toute date. Le skew et la convexité ATM sont donnés par

$$\frac{\partial I(t, k)}{\partial k} \Big|_{k=0} = \frac{\rho\sqrt{\theta_t}}{2\sqrt{t}}\phi(\theta_t), \quad \frac{\partial^2 I(t, k)}{\partial k^2} \Big|_{k=0} = \frac{(1 - 2\rho^2)\sqrt{\theta_t}}{4\sqrt{t}}\phi^2(\theta_t).$$

On peut montrer que la forme paramétrique (4.24) n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si les conditions suffisantes suivantes sont respectées :

- La fonction  $\theta_t$  est croissante en  $t$  ;
- La fonction  $\phi$  vérifie les relations suivantes, pour tout  $\theta > 0$  :

$$0 \leq \frac{\partial(\theta\phi(\theta))}{\partial\theta} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2}\phi(\theta),$$

$$\theta\phi(\theta) < \frac{4}{1 + |\rho|}, \quad \theta\phi^2(\theta) \leq \frac{4}{1 + |\rho|}.$$

Par exemple, la fonction

$$\phi(\theta) = \frac{\eta}{\theta^\gamma(1 + \theta)^{1-\gamma}}$$

vérifie les contraintes d'arbitrage pour  $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$  et  $\eta \leq \frac{2}{\sqrt{1+|\rho|}}$ .

Voir le cours de Gatheral sur le site de Imperial College <https://www.imperial.ac.uk/quantitative-finance/events/lectures/2014-15/gatheral/> pour les exemples de calibration du modèle SSVI aux surfaces de volatilité implicite du marché.



# Chapitre 5

## Valorisation d'options exotiques

- *Modèle de Black-Scholes-Samuelson multidimensionnel.*
- *Dynamique d'un portefeuille autofinçant contenant plusieurs actifs risqués. Représentation des stratégies de portefeuille en termes du nombre d'unités de chaque actif, du montant investi dans chaque actif, et de la proportion de la richesse totale investie dans chaque actif.*
- *Stratégies admissibles, absence d'opportunité d'arbitrage, primes de risque.*
- *Formule de valorisation risque-neutre des actifs contingents.*
- *Formule de Black-Scholes avec volatilité et taux d'intérêt déterministes dépendants du temps.*
- *Méthode de changement de numéraire. Transformation des volatilités par changement de numéraire.*
- *Mesure martingale associée au numéraire ; formule de changement de mesure martingale par changement de numéraire.*
- *Formule de Black-Scholes généralisée.*
- *Valorisation d'une option quanto.*
- *Probabilité forward-neutre.*
- *Options à barrière : valorisation par réplication dynamique.*
- *Options à barrière : valorisation des options Regular par réplication statique.*
- *Réplication d'une option Européenne quelconque par des calls et puts.*
- *Swap de variance : réplication statique.*

### 5.1 Evaluation risque-neutre

**Modèle de Black-Scholes multidimensionnel** Dans cette section nous introduisons un modèle du marché plus général que celui de la section 3.1, fondé sur le calcul stochastique et applicable aux options exotiques ainsi qu'aux options sur plusieurs sous-jacents.

Soit  $W = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0}^\perp$  un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sa filtration naturelle complétée par les ensembles de mesure nulle. Nous considérons un

marché financier composé d'un actif sans risque et de  $d$  actifs risqués. La valeur de l'actif sans risque à toute date  $t$  est donnée par

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right), \quad (5.1)$$

où le taux d'intérêt instantané  $r$  est un processus positif mesurable et adapté. Les valeurs des  $d$  actifs risqués vérifient

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(\int_0^t \left(b^i(u) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d |\sigma^{ij}(t)|^2\right) dt + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j\right), \quad i = 1, \dots, d,$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont des processus mesurables adaptés. Les processus  $r$ ,  $b$  et  $\sigma$  vérifient la condition d'intégrabilité

$$\int_0^T (\|r(t)\| + \|b(t)\| + \|\sigma(t)\|^2) dt < \infty, \quad \text{p.s.},$$

où  $T$  est un horizon de temps. De plus, on suppose que la matrice  $\sigma(t)$  est inversible pour tout  $t$ .

Par application de la formule d'Itô,

$$dS_t^i = S_t^i \left( b^i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j \right),$$

ou avec des notations matricielles,

$$dS_t = \text{diag}[S_t](b(t)dt + \sigma(t)dW_t), \quad (5.2)$$

où  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)^\top$ ,  $b(t) = (b^1(t), \dots, b^d(t))^\top$  et  $\text{diag}[S_t]$  est la matrice ayant les éléments du vecteur  $S_t$  sur la diagonale principale et zéros partout ailleurs.

Introduisons le vecteur des *primes de risque* :

$$\lambda(t) = \sigma(t)^{-1}(b(t) - r(t)\mathbf{1}),$$

où  $\mathbf{1}$  est un vecteur colonne  $d$ -dimensionnel dont tous les éléments sont égaux à 1. Cela permet d'écrire

$$dS_t = \text{diag}[S_t] \{r(t)\mathbf{1}dt + \sigma(t)(\lambda(t)dt + dW_t)\}.$$

L'actualisation simplifie considérablement les développements qui vont suivre :

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = S_t e^{-\int_0^t r(s)ds},$$

et on a alors

$$d\tilde{S}_t = \text{diag}[\tilde{S}_t] \sigma(t)(\lambda(t)dt + dW_t).$$

**Stratégies de portefeuille** Une stratégie de portefeuille détermine les positions de l'investisseur dans chaque actif à toute date. Cette stratégie peut être exprimée de manière équivalente en termes de *quantités* des actifs risqués à acheter  $\delta_t = (\delta_t^1, \dots, \delta_t^d) \in \mathbb{R}^d$ , en termes de *montants* à investir dans chaque actif risqué  $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d) \in \mathbb{R}^d$  ou bien, si la valeur du portefeuille notée par  $X_t$  est positive à toute date, en termes de *proportions* de la richesse totale à investir dans chaque actif risqué  $\omega_t = (\omega_t^1, \dots, \omega_t^d) \in \mathbb{R}^d$ . Ces coefficients sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$\pi_t^i = \delta_t^i S_t^i \quad \text{et} \quad w_t^i = \frac{\delta_t^i S_t^i}{X_t}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Le montant investi en l'actif sans risque est donné par

$$X_t - \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i = X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i = X_t \left( 1 - \sum_{i=1}^d w_t^i \right)$$

L'équation d'autofinancement exprime le fait que aucun montant n'est retiré ni injecté dans le portefeuille. Pour les différentes représentations de la stratégie, elle s'écrit de manières suivantes :

— En termes de quantités :

$$dX_t = \sum_{i=1}^d \delta_t^i dS_t^i + \left( X_t - \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}.$$

— En termes de montants :

$$dX_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left( X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}. \quad (5.3)$$

— En termes de proportions :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sum_{i=1}^d \omega_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left( 1 - \sum_{i=1}^d \omega_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}.$$

Dans ce chapitre on va essentiellement représenter les stratégies de portefeuille en termes de *montants* investis en chaque actif risqué. Une stratégie de portefeuille est donc un couple  $(x, (\pi_t)_{0 \leq t \leq T})$ , où  $x$  est la valeur initiale et  $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d) \in \mathbb{R}^d$  (vecteur ligne) représente le montant à investir dans chaque actif risqué à la date  $t$ , et la dynamique du portefeuille autofinçant est déterminée par l'équation (5.3). En passant aux valeurs actualisées, cette équation se simplifie :

$$d\tilde{X}_t = \tilde{\pi}_t \text{diag}[\tilde{S}_t]^{-1} d\tilde{S}_t = \tilde{\pi}_t \sigma(t) \{ \lambda(t) dt + dW_t \}.$$

Dans la suite, on notera par  $X_t^{x, \pi}$  la valeur du portefeuille autofinçant de valeur initiale  $x$  et géré avec la stratégie  $\pi$ .

En supposant que la prime de risque vérifie la condition de Novikov

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt \right) \right] < \infty,$$

on obtient par théorème de Girsanov que sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left( - \int_0^T \lambda(t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt \right),$$

le processus

$$\widehat{W}_t = \int_0^t \lambda(s) ds + W_t$$

est un mouvement brownien. On peut alors écrire

$$\tilde{X}_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \tilde{\pi}_u \sigma(u) d\widehat{W}_u. \quad (5.4)$$

Remarquons que sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , la valeur actualisée d'un portefeuille autofinanciant, et les prix actualisés des actifs risqués sont des *martingales locales*, mais pas nécessairement des martingales.

**Définition 5.** La stratégie de portefeuille  $(\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$  est admissible si l'intégrale (5.4) est bien défini, ce qui est le cas si

$$\int_0^T \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du < \infty \quad \text{p.s.},$$

et si la valeur de portefeuille vérifie

$$\tilde{X}_t^{0,\pi} \geq M_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.5)$$

où  $M$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.

Dans la suite, on notera par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des stratégies admissibles.

### Portefeuilles admissibles et absence d'arbitrage

**Définition 6** (Absence d'opportunité d'arbitrage). On dit que le marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si, pour toute stratégie admissible de la forme  $\pi$ ,

$$X_T^{0,\pi} \geq 0 \quad \text{p.s.} \quad \Rightarrow \quad X_T^{0,\pi} = 0 \quad \text{p.s.}$$

La condition (5.5) est nécessaire en temps continu pour éviter des arbitrages de type "stratégie de doublement de la mise". Pour décrire une telle stratégie, supposons que le cours du sous-jacent est modélisé par un mouvement brownien standard :  $S_t = W_t$ , et que le taux d'intérêt est nul

sur le marché. La stratégie consiste à détenir  $2^{n/2}$  unités de l'actif risqué sur l'intervalle de temps  $(t_{k-1}, t_k]$ , où l'on pose  $t_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ . La valeur du portefeuille à l'instant  $t_n$  est alors donnée par

$$X_{t_n} = \sum_{k=1}^n 2^{k/2} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^n Z_k,$$

où  $(Z_k)_{k \geq 1}$  est une suite de variables i.i.d. de loi normale centrée réduite.  $(X_{t_n})_{n \geq 1}$  est alors une marche aléatoire gaussienne, qui vérifie

$$\inf\{n : X_{t_n} \geq K\} < \infty \quad \text{p.s.} \quad \forall K.$$

Il est donc possible de réaliser un gain arbitrairement grand, en un temps fini (sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$ ). Cependant, cette stratégie n'est pas admissible au sens de la définition 5. En pratique, avant d'atteindre la valeur  $K$ , le portefeuille peut prendre des valeurs négatives arbitrairement grandes.

**Théorème 8.** *Le marché financier défini par (5.1), (5.2) et (5.4), avec les stratégies admissibles données par Définition 5, n'admet pas d'opportunité d'arbitrage.*

*Démonstration.* Soit  $\pi$  une stratégie admissible telle que  $X_T^{0,\pi} \geq 0$  p.s. On pose

$$\tau_n = \inf \left\{ t : \int_0^t \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du \geq n \right\} \wedge T.$$

Alors,  $(\tau_n)$  est une suite des temps d'arrêt qui converge p.s. vers  $T$  et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_0^{\tau_n} \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du \right] \leq n < \infty,$$

ce qui implique que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi}] = 0.$$

pour tout  $n$ . Mais par le lemme de Fatou, puisque  $\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi} - M_{\tau_n} \geq 0$ , on a :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_T^{0,\pi}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi} - M_{\tau_n}) \right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_0] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi} - M_{\tau_n})] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_0] = 0,$$

ce qui implique que  $X_T^{0,\pi} = 0$  p.s. □

*Remarque 1.* Avec la condition de la ligne de crédit intégrable (5.5), l'existence des primes de risque

$$b(t) = r(t)\mathbf{1} + \sigma(t)\lambda(t)$$

vérifiant la condition de Novikov est suffisante pour l'absence d'arbitrage même si le nombre de facteurs de risque (browniens) ne coïncide pas avec le nombre d'actifs risqués. S'il y a plus d'actifs que de facteurs de risque, cette condition donne des contraintes sur les rendements des actifs (voir l'exercice à la fin de ce chapitre). Si le nombre de facteurs est supérieur au nombre d'actifs, il y a plusieurs primes de risque possibles et donc plusieurs probabilités risque-neutres.

**Evaluation des actifs contingents** Le prix de surcouverture d'un actif contingent est le coût minimal d'un portefeuille qui domine cet actif à la date  $T$  :

**Définition 7** (Prix de surcouverture). Soit  $G \in \mathcal{F}_T$ . Le prix de surcouverture de  $G$  à l'instant  $t = 0$  est défini par

$$\bar{V}_0(G) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists \pi \text{ avec } \pi \in \mathcal{A} \text{ et } X_T^{x,\pi} \geq G\}.$$

Le prix de surcouverture de  $G$  à l'instant  $t \in [0, T]$  est défini par

$$\bar{V}_t(G) = \text{essinf}\{X \in \mathcal{F}_t : \exists \pi \in \mathcal{A} \text{ avec } X_t^{x,\pi} = X \text{ et } X_T^{x,\pi} \geq G\}.$$

De la même manière, on peut définir le prix de sous-couverture d'un actif contingent, qui sera noté par  $\underline{V}_0(G)$  et  $\underline{V}_t(G)$  : Le prix de sous-couverture de  $G$  à l'instant  $t = 0$  est défini par

$$\underline{V}_0(G) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists \pi \text{ avec } -\pi \in \mathcal{A} \text{ et } X_T^{x,\pi} \leq G\}.$$

Le prix de sous-couverture de  $G$  à l'instant  $t \in [0, T]$  est défini par

$$\underline{V}_t(G) = \text{essinf}\{X \in \mathcal{F}_t : \exists \pi \text{ avec } -\pi \in \mathcal{A} \text{ avec } X_t^{x,\pi} = X \text{ et } X_T^{x,\pi} \leq G\}.$$

La présence de  $-\pi$  dans la définition du prix de sous-couverture est logique : si l'actif est disponible sur le marché au prix inférieur de son prix de sous-couverture, la stratégie d'arbitrage consiste à acheter l'actif et vendre le portefeuille de sous-couverture, et pour cela il faut que la stratégie  $-\pi$  soit admissible. Si un actif est repliquable par un portefeuille admissible, il est clair, que son prix de surcouverture coïncide avec son prix de sous-couverture. Dans ce cas, on appellera cet unique prix *le prix de non-arbitrage*.

**Théorème 9.** Soit  $G \in \mathcal{F}_T$  un actif contingent tel que  $\tilde{G} \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ . Alors il existe un portefeuille de replication pour  $G$  et à tout instant  $t \leq T$ , le prix de non-arbitrage de  $G$  est donné par

$$V_t(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

*Démonstration.* Par le théorème de représentation des martingales dans la filtration brownienne (Théorème 10), pour tout  $G \in \mathcal{F}_T$  avec  $\tilde{G} \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ , il existe un unique processus adapté  $H \in \mathcal{H}^2$  avec

$$\tilde{G} = \mathbb{E}[\tilde{G}] + \int_0^T H_s d\widehat{W}_s.$$

Posons  $\tilde{\pi}_t = \sigma(t)^{-1} H_t$ . Alors

$$\tilde{X}_t^{x,\pi} := \mathbb{E}[\tilde{G}] + \int_0^t \tilde{\pi}_s \sigma(s) d\widehat{W}_s$$

est la valeur actualisée d'un portefeuille autofinancant qui permet de repliquer l'actif contingent  $G$ . De plus  $\tilde{X}_t$  est un  $\mathbb{Q}$ -martingale et donc un portefeuille admissible. Par la propriété de martingale on a alors

$$\tilde{X}_t^{x,\pi} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

□

Les implications pratiques des développements de cette section peuvent être résumées comme suit :

**Valorisation d'actifs contingents dans le modèle de Black et Scholes**

Dans le modèle de Black et Scholes généralisé, défini par équations (5.1) et (5.2), l'unique prix de non-arbitrage d'une option de pay-off  $G \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$  à l'instant  $T$  est donné par

$$V_t(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où  $\mathbb{Q}$  est la probabilité risque-neutre, c'est-à-dire, une probabilité telle que les actifs risqués vérifient

$$dS_t = \text{diag}[S_t](r(t)\mathbf{1}dt + \sigma(t)d\widehat{W}_t),$$

où  $\widehat{W}$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien.

**Retour sur la formule de Black et Scholes** Supposons que le nombre d'actifs risqués est égal à  $d = 1$ , et le pay-off  $G$  est une fonction déterministe de la valeur finale du sous-jacent :  $G = g(S_T)$ , et que les processus  $r$  et  $\sigma$  sont déterministes. Dans ce cas, la formule de pricing devient

$$\begin{aligned} V_t(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} g(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} g \left( S_t e^{\int_t^T \left( r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] := v(t, S_t), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} v(t, S) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} g \left( S e^{\int_t^T \left( r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-(T-t)\bar{r}} g \left( S e^{(\bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2})(T-t) + \bar{\sigma}\widehat{W}_{T-t}} \right) \right], \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\bar{r} := \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s)ds \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s)ds. \quad (5.6)$$

Dans le cas d'une option Call, on a  $g(S) = (S - K)^+$  et

$$\begin{aligned} V_t(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} (S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\int_0^t r(s)ds} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ Z_T \mathbf{1}_{S_T \geq K} \middle| \mathcal{F}_t \right] - K e^{-\int_t^T r(s)ds} \mathbb{Q}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

avec

$$Z_T = e^{-\int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_0^T \sigma(s) d\widehat{W}_s}.$$

Introduisons une nouvelle probabilité  $\tilde{\mathbb{Q}}$  via

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \bigg|_{\mathcal{F}_T} = Z_T.$$

On a alors

$$\pi_t(G) = S_t \tilde{\mathbb{Q}}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t] - K e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbb{Q}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t].$$

De plus,

$$\tilde{W}_t = \widehat{W}_t - \int_0^t \sigma(s) ds$$

est un mouvement Brownien sous  $\tilde{\mathbb{Q}}$ , et donc

$$\begin{aligned} V_t(G) &= S_t \tilde{\mathbb{Q}} \left[ S_t e^{\int_t^T \left( r(s) + \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\tilde{W}_s} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - K e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbb{Q} \left[ S_t e^{\int_t^T \left( r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t \tilde{\mathbb{Q}} \left[ S_t e^{\left( \bar{r} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) (T-t) + \bar{\sigma} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - K e^{-\bar{r}(T-t)} \mathbb{Q} \left[ S_t e^{\left( \bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) (T-t) + \bar{\sigma} (\widehat{W}_T - \widehat{W}_t)} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t N(d_1) - K e^{-\bar{r}(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

avec

$$d_{12} = \frac{\log \frac{S_t}{K e^{-\bar{r}(T-t)}} \pm \frac{\bar{\sigma}^2 (T-t)}{2}}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}}.$$

En conclusion, on a obtenu le résultat suivant, qui généralise la formule de Black-Scholes classique :

Le prix d'une option Call dans le modèle de Black-Scholes avec volatilité et taux d'intérêt déterministes dépendants du temps est donné par

$$C_{BS}(t, S) = S_t N(d_1) - K e^{-\bar{r}(T-t)} N(d_2), \quad (5.7)$$

où les coefficients  $d_{12}$  sont donnés ci-dessus, et  $\bar{r}$  et  $\bar{\sigma}$  sont, respectivement, le taux d'intérêt et la volatilité moyennes, définis dans (5.6).

## 5.2 Changement de numéraire

Dans cette section on verra que la valorisation de certaines options peut être largement simplifiée, en exprimant les prix de tous les actifs, et la valeur du portefeuille en unités d'un actif de référence, appelé *numéraire*. Les exemples les plus utiles des numéraires sont les actifs sans risque étrangers pour la valorisation des options de change, le portefeuille du marché ou le zéro-coupon. L'actualisation des actifs revient à utiliser l'actif sans risque domestique comme numéraire.

**Définition 8.** Un *numéraire* est un actif ou un portefeuille autofinçant, dont la valeur  $(Y_t)$  vérifie les conditions suivantes :

- Stricte positivité :  $Y_t > 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  p.s.
- Propriété de martingale : la valeur actualisée  $(\tilde{Y}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.



Dans cette section, nous n'allons pas systématiquement choisir l'actif sans risque comme numéraire, et il ne jouera pas de rôle particulier. Pour rendre le modèle plus symétrique, on écrira alors  $S_t = (S_t^0, \dots, S_t^d)^\perp$  avec

$$dS_t^i = S_t^i \left( b^i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t)dW_t^j \right), \quad i = 0, \dots, d,$$

où l'on pose  $b^0(t) = r(t)$  et  $\sigma^{0j}(t) = 0$ . La valeur et la dynamique d'un portefeuille autofinçant (en termes de quantités) s'écrivent alors

$$X_t = \sum_{i=0}^d \delta_t^i S_t^i, \quad dX_t = \sum_{i=0}^d \delta_t^i dS_t^i.$$

Pour un portefeuille ou un actif  $X$  et un numéraire  $Y$ , nous noterons parfois la valeur de  $X$  exprimée en numéraire  $Y$  par  $X_t^Y := \frac{X_t}{Y_t}$ .

**Changement de numéraire et volatilités** Supposons que la dynamique de l'actif  $X$  (en euros, avec les notations vectorielles) est

$$dX_t = X_t \{ r(t)dt + \gamma^X(t)(\lambda(t)dt + dW_t) \}$$

et la dynamique du numéraire  $Y$  est

$$dY_t = Y_t \{ r(t)dt + \gamma^Y(t)(\lambda(t)dt + dW_t) \}.$$

On peut alors exprimer la dynamique de  $X$  dans le numéraire  $Y$  à l'aide de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dX_t^Y &= \frac{dX_t}{Y_t} - \frac{X_t}{Y_t^2} dY_t + \frac{X_t}{Y_t^3} d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle X, Y \rangle_t}{Y_t^2} \\ &= X_t^Y \{ (\gamma^X(t) - \gamma^Y(t))(\lambda(t)dt + dW_t) + \gamma^Y(t)\gamma^Y(t)^\perp dt - \gamma^X(t)\gamma^X(t)^\perp dt \} \\ &= X_t^Y (\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)) \{ (\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp)dt + dW_t \}. \end{aligned}$$

Dans le nouveau numéraire, la volatilité (vectorielle) de  $X$  est donnée par  $\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)$ , et le vecteur des primes de risque devient  $\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp$ .

En particulier, la dynamique des actifs risqués dans le nouveau numéraire devient

$$dS_t = \text{diag}[S_t](\sigma(t) - \mathbf{1}\gamma^Y(t))((\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp)dt + dW_t)$$

ou encore sous la probabilité risque-neutre

$$dS_t = \text{diag}[S_t](\sigma(t) - \mathbf{1}\gamma^Y(t))(-\gamma^Y(t)^\perp dt + d\widehat{W}_t). \quad (5.8)$$

*Exemple 4.* Le vecteur de volatilité  $\gamma^X(t)$  contient les coefficients devant les mouvements browniens indépendants  $W^1, \dots, W^d$  dans la dynamique de  $X$ . La volatilité scalaire de  $X$  (écart type des rendements) est donnée par la norme euclidienne du vecteur de volatilité :  $\sigma^X(t) = \|\gamma^X(t)\|$ .

Supposons que la dynamique de  $X$  et  $Y$  est

$$dX_t = X_t \{b^X(t)dt + \sigma^X(t)dW_t^X\} \quad \text{et} \quad dY_t = Y_t \{b^Y(t)dt + \sigma^Y(t)dW_t^Y\},$$

où  $W^X$  et  $W^Y$  sont des mouvements browniens unidimensionnels tels que

$$d\langle W^X, W^Y \rangle = \rho dt.$$

Nous pouvons alors exprimer la dynamique de  $X$  et  $Y$  à l'aide de deux mouvements browniens indépendants  $\widehat{W}^1$  et  $\widehat{W}^2$  :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \left\{ b^X(t)dt + \sigma^X(t)d\widehat{W}_t^1 \right\} \\ dY_t &= Y_t \left\{ b^Y(t)dt + \sigma^Y(t)(\rho d\widehat{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}d\widehat{W}_t^2) \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit une représentation vectorielle :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \left\{ b^X(t)dt + \gamma^X(t)d\widehat{W}_t \right\}, & \gamma^X(t) &= (\sigma^X(t), 0), \\ dY_t &= Y_t \left\{ b^Y(t)dt + \gamma^Y(t)d\widehat{W}_t \right\}, & \gamma^Y(t) &= (\sigma^Y(t)\rho, \sigma^Y(t)\sqrt{1-\rho^2}). \end{aligned}$$

La volatilité (scalaire) de  $X$  dans le numéraire  $Y$  est donc donnée par

$$\begin{aligned} \|\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)\| &= \sqrt{(\sigma^X(t) - \rho\sigma^Y(t))^2 + (1-\rho^2)\sigma^Y(t)^2} \\ &= \sqrt{\sigma^X(t)^2 + \sigma^Y(t)^2 - 2\rho\sigma^X(t)\sigma^Y(t)}. \end{aligned}$$

**Changement de numéraire et changement de probabilité** Soit  $Y$  un numéraire. L'équation (5.8) montre que dans ce numéraire, les prix actualisés des actifs ne sont pas des martingales locales sous la probabilité risque neutre. Dans le nouveau numéraire, la probabilité risque-neutre sera remplacée par une autre mesure de probabilité qu'on appellera *mesure martingale associée au numéraire*. Soit

$$Z_T = e^{\int_0^T \gamma^Y(t)d\widehat{W}_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma^Y(t)\|^2 dt} = \frac{Y_T}{Y_0 e^{\int_0^T r(s)ds}}.$$

Par hypothèse,  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_T] = 1$  et on peut introduire la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^Y$

$$\frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{Q}} = Z_T.$$

Sous cette probabilité le processus  $W_t^Y = \widehat{W}_t - \int_0^t \gamma^Y(s)^\perp ds$  est un mouvement brownien, la dynamique des actifs devient

$$dS_t = \text{diag}[S_t](\sigma(t) - \mathbf{1}\gamma^Y(t))dW_t^Y$$

et leurs prix sont des martingales locales.

**Définition 9.** Soit  $Y$  un numéraire et  $\mathbb{Q}$  la probabilité risque-neutre. Alors la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^Y$  définie par

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{Q}} \right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{Y_T}{Y_0 e^{\int_0^T r(s) ds}}$$

s'appelle la mesure martingale associée à  $Y$ .

**Changement de numéraire et portefeuilles** Dans ce paragraphe nous montrons que les notions de base de mathématiques financières ne dépendent pas du choix de numéraire.

**Proposition 4.** *La notion du portefeuille autofinçant est invariante par changement de numéraire.*

*Démonstration.* Supposons que la dynamique du numéraire  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est donnée (sous forme matricielle) par

$$dY_t = Y_t (b^Y(t)dt + \gamma^Y(t)dW_t).$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ , on trouve

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) &= \frac{dX_t}{Y_t} - \frac{X_t}{Y_t^2} dY_t + \frac{X_t}{Y_t^3} d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle X, Y \rangle_t}{Y_t^2} \\ &= \sum_{i=0}^d \delta_i \left\{ \frac{dS_t^i}{Y_t} - \frac{S_t^i}{Y_t^2} dY_t + \frac{S_t^i}{Y_t^3} d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle S^i, Y \rangle_t}{Y_t^2} \right\} = \sum_{i=0}^d \delta_t^i d\left(\frac{S_t^i}{Y_t}\right). \end{aligned}$$

□

Afin de parler des opportunités d'arbitrage il nous faut maintenant démontrer que la notion de portefeuille admissible est également invariante par changement de numéraire. Cependant, définition 5 n'est clairement pas adaptée à ce cadre car elle dépend de la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ . Lorsque le portefeuille est écrit dans le numéraire  $Y$  on dira qu'il est admissible si sa valeur vérifie

$$X_t^Y \geq M_t^Y, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.9)$$

presque sûrement, où  $M^Y$  est  $\mathbb{Q}^Y$ -martingale. Il est clair que la nouvelle définition coïncide avec l'ancienne lorsque le numéraire  $Y$  est l'actif sans risque. De plus, elle a l'avantage d'être invariante par rapport au choix de numéraire.

**Proposition 5.** *Soit  $X$  un portefeuille autofinçant et  $Y$  un numéraire. Alors la condition (5.9) est vérifiée si et seulement si la condition (5.5) est vérifiée.*

*Démonstration.* Supposons que la condition (5.5) est vérifiée. Alors il existe une  $\mathbb{Q}$ -martingale  $M$  tel que

$$\tilde{X}_t \geq M_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad \iff \quad X_t^Y \geq \frac{M_t e^{\int_0^t r(s) ds}}{Y_t} := M_t^Y.$$

Lemme 3 implique alors que  $M^Y$  est un  $\mathbb{Q}^Y$ -martingale. L'implication inverse se démontre de la même manière. □

Ensemble, les deux proposition précédentes impliquent qu'une stratégie qui est un arbitrage dans un numéraire est un arbitrage dans tout autre numéraire. La notion d'absence d'arbitrage est donc invariante par changement de numéraire.

**Formule de Black-Scholes généralisée** On considère une option d'échanger le flux  $F^1$  contre le flux  $F^2$  à la date  $T$ . On suppose que pour les flux  $F^1$  et  $F^2$  il existent des portefeuilles de réplcation, dont les valeurs seront notées par  $F_t^1$  et  $F_t^2$ , qui sont *lognormaux*, de volatilités (vectorielles)  $\gamma^1(t)$  et  $\gamma^2(t)$ , c'est-à-dire qu'ils ont les dynamiques

$$\frac{dF_t^1}{F_t^1} = b^1(t)dt + \gamma^1(t)dW_t, \quad \frac{dF_t^2}{F_t^2} = b^2(t)dt + \gamma^2(t)dW_t,$$

où  $b^1, b^2, \gamma^1, \gamma^2$  ainsi que le taux d'intérêt  $r$  sont des fonctions déterministes. Nous noterons par  $\mathbb{Q}^1$  et  $\mathbb{Q}^2$  les mesures martingales associées, respectivement, aux numéraires  $F^1$  et  $F^2$ . On a alors :

$$\frac{d\mathbb{Q}^1}{d\mathbb{Q}} = \frac{F_T^1}{F_0^1} e^{-\int_0^T r(s)ds} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbb{Q}^2}{d\mathbb{Q}} = \frac{F_T^2}{F_0^2} e^{-\int_0^T r(s)ds}.$$

Le prix de l'option d'échange peut alors être exprimé de manière suivante.

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} (F_T^1 - F_T^2)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} F_T^1 \mathbf{1}_{F_T^1 \geq F_T^2} | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} F_T^2 \mathbf{1}_{F_T^1 \geq F_T^2} | \mathcal{F}_t] \\ &= F_t^1 \mathbb{Q}^1[F_T^1 \geq F_T^2 | \mathcal{F}_t] - F_t^2 \mathbb{Q}^2[F_T^1 \geq F_T^2 | \mathcal{F}_t] \\ &= F_t^1 \mathbb{Q}^1\left[\frac{F_T^2}{F_T^1} \leq 1 | \mathcal{F}_t\right] - F_t^2 \mathbb{Q}^2\left[\frac{F_T^1}{F_T^2} \geq 1 | \mathcal{F}_t\right] \\ &= F_t^1 N\left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}\right) - F_t^2 N\left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}\right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma^1(s) - \gamma^2(s)\|^2 ds$ , puisque  $\frac{F_t^2}{F_t^1}$  est une martingale lognormale de volatilité  $\gamma^1(t) - \gamma^2(t)$  sous  $\mathbb{Q}^1$  et  $\frac{F_t^1}{F_t^2}$  est une martingale lognormale de volatilité  $\gamma^1(t) - \gamma^2(t)$  sous  $\mathbb{Q}^2$ .

En conclusion, pour déterminer le prix d'une option d'échanger le flux  $F^1$  contre le flux  $F^2$ , il faut utiliser l'algorithme suivant :

- Identifier les portefeuilles de réplcation  $F_t^1$  et  $F_t^2$  (par exemple, en utilisant la méthode de valorisation risque-neutre), et calculer leur volatilités respectives  $\gamma^1(t)$  et  $\gamma^2(t)$  *par rapport au même mouvement brownien vectoriel*.
- Calculer le prix de l'option d'échange à la date  $t$  avec la formule de Black-Scholes généralisée

$$V_t = F_t^1 N\left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}\right) - F_t^2 N\left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}\right),$$

$$\text{où } Var_t^T = \int_t^T \|\gamma^1(s) - \gamma^2(s)\|^2 ds$$

Par la formule d'Itô, la dynamique de  $V_t$  est

$$dV_t = N\left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}\right) dF_t^1 - N\left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}\right) dF_t^2.$$

L'option peut donc être répliquée par un portefeuille contenant

$$N \left( \frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} \text{Var}_t^T}{\sqrt{\text{Var}_t^T}} \right)$$

unités de l'actif  $F^1$  et

$$-N \left( \frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} \text{Var}_t^T}{\sqrt{\text{Var}_t^T}} \right)$$

unités de l'actif  $F^2$ .

*Exemple 5* (Option quanto). Une option quanto est une option sur un titre étranger avec strike en monnaie étrangère, dont le pay-off est converti en monnaie domestique moyennant un taux de change fixé dans le contrat. Le pay-off est donné par

$$\bar{X}(S_T - K),$$

où  $\bar{X}$  est le taux de change contractuel. Pour simplifier la notation, nous posons  $\bar{X} = 1$  dans la suite. Cette option est sensible à la fois au risque de fluctuation de l'actif étranger et au risque de change.

Nous noterons le taux d'intérêt domestique par  $r(t)$  et le taux d'intérêt étranger par  $r^e(t)$ . Les deux taux sont supposés déterministes. La dynamique de l'actif étranger  $S$  est

$$\frac{dS_t}{S_t} = b(t)dt + \gamma(t)dW_t,$$

et le taux de change  $X$  (valeur en monnaie domestique d'une unité de monnaie étrangère) suit la dynamique

$$\frac{dX_t}{X_t} = b^X(t)dt + \gamma^X(t)dW_t.$$

La probabilité risque-neutre sur le marché étranger est notée par  $\mathbb{Q}^e$ .

Nous appliquons les résultats de la section précédente avec  $F^1 = S_T$  et  $F^2 = K$ . La valeur du portefeuille de replication pour  $F^2$  est clairement donnée par  $F_t^2 = e^{-\int_t^T r(s)ds} K$ . La valeur du portefeuille de réplication pour  $F^1$  est

$$\begin{aligned} F_t^1 &= X_t \mathbb{E}^{Q^e} \left[ e^{-\int_t^T r^e(s)ds} \frac{S_T}{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= X_t S_t \mathbb{E}^{Q^e} \left[ \frac{1}{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] e^{-\int_t^T \gamma(s) + \gamma^X(s)ds} \\ &= S_t e^{\int_t^T (r^e(s) - r(s))ds} e^{-\int_t^T \gamma(s) + \gamma^X(s)ds}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que pour tout vecteur gaussien 2-dimensionnel  $(X, Y)$ ,

$$\mathbb{E}[e^{X+Y}] = \mathbb{E}[e^X] \mathbb{E}[e^Y] e^{\text{cov}(X,Y)}.$$

Le prix de l'option est donc donné par la formule (5.10), avec  $\text{Var}_t^T = \int_t^T \|\gamma(s)\|^2 ds$ .

**Exercice 1.** Calculer la stratégie de couverture pour l'option quanto.

*Exemple 6* (Taux d'intérêt stochastiques et probabilité forward-neutre). Dans cet exemple nous supposons que le taux d'intérêt n'est pas déterministe mais peut varier de manière stochastique. Ceci implique que les zéro-coupons sont des actifs risqués. Nous supposons que le prix du zéro-coupon d'échéance  $T$  suit la dynamique lognormale

$$dB_t(T) = B_t(T)(\mu^B(t)dt + \gamma^B(t)dW_t).$$

Le prix d'une option call européen de pay-off  $(S_T - K)^+$  peut alors être calculé par la formule (5.10), en posant  $F^1 = S_T$  et  $F^2 = K$ . Les valeurs des portefeuilles de réplication correspondantes sont  $F_t^1 = S_t$  et  $F_t^2 = B_t(T)$  et le prix de l'option est donné par (5.10) avec  $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma(s) - \gamma^B(s)\|^2 ds$ .

Il est cependant intéressant de calculer le prix de cet option directement. En prenant l'espérance sous la probabilité risque-neutre, on trouve

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right].$$

Pour la valorisation d'une option d'échéance  $T$  en présence de taux d'intérêt stochastiques, il est commode de choisir comme numéraire le zéro-coupon d'échéance  $T$ . La probabilité martingale associée à ce numéraire s'appelle la probabilité *forward-neutre* d'échéance  $T$ . Elle est définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^T r(s)ds}}{B_0(T)}, \quad D_t = \frac{e^{-\int_0^T r(s)ds} B_t(T)}{B_0(T)}.$$

En utilisant la probabilité forward-neutre, on a alors

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right] = B_t(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[ (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right],$$

c'est-à-dire, l'effet des taux stochastiques disparaît sous cette probabilité. De plus,  $S_T = \frac{S_T}{B_T(T)}$ , et par définition d'une mesure martingale associée à un numéraire,  $\frac{S_t}{B_t(T)}$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}^T$ . Le prix peut donc être calculé en utilisant la formule de Black-Scholes standard, appliqué à  $\frac{S_t}{B_t(T)}$ , ce qui donne

$$V_t = S_t N(d_1) - K B_t(T) N(d_2),$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{S_t}{K B_t(T)} \pm \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}.$$

### 5.3 Options à barrière et réplication statique

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre du modèle Black-Scholes unidimensionnel avec volatilité et taux d'intérêt constants. Nous allons nous intéresser aux options à barrière avec fonctions pay-off arbitraires (pas nécessairement des calls et des puts). Le prix d'une option Up and In qui paye  $f(S_T)$  à la date  $T$  si la barrière  $B$  a été franchie avant cette date sera noté par  $UI_t(S_t, B, f(S_T), T)$ , où  $t$  est la date courante et  $S_t$  est le prix courant du sous-jacent. De la même

manière,  $UO$  est le prix d'une option Up and Out, et  $EUR_t(S_t, f(S_T), T)$  est le prix d'une option européenne de pay-off  $f(S_T)$ . Ces fonctions vérifient les relations immédiates suivantes :

$$UI_t + UO_t = EUR_t \quad (5.11)$$

$$UI_t(S_t, B, f(S_T), T) = EUR_t(S_t, f(S_T), T) \quad \text{si } f(z) = 0 \text{ pour } z < B \quad (5.12)$$

$$UI_t(S_t, B, f(S_T), T) = UI_t(S_t, B, f(S_T)1_{S_T < B}, T) \quad (5.13)$$

$$+ EUR_t(S_t, f(S_T)1_{S_T \geq B}, T) \quad \text{en général.} \quad (5.14)$$

**Valorisation par EDP et réplication dynamique** L'approche EDP s'applique aux options Down and Out / Up and Out. Les prix des options In correspondantes peuvent être calculés en utilisant la relation (5.12). Nous nous concentrons sur l'exemple de Up and Out. Par le principe de valorisation risque-neutre,

$$UO_t(x, B, f(S_T), T) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)} f(S_T) 1_{\sup_{t \leq s \leq T} S_s < B} | S_t = x].$$

Soit  $v$  une solution régulière de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = r \left( v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right), \quad 0 \leq S \leq B, \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition au bord  $v(t, B) = 0 \forall t \in [0, T]$  et la condition terminale  $v(T, S) = f(S) \forall S \in [0, B]$ . On note enfin  $\tau_B = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq B\}$  et  $V_t = v(t \wedge \tau_B, S_{t \wedge \tau_B})$ . Alors par la formule d'Itô,

$$dV_t = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial S} dS_t + r(V_t - S_t \frac{\partial v}{\partial S}) dt, & t < \tau_B \\ 0, & t \geq \tau_B. \end{cases}$$

Par ailleurs,  $V_T = v(T \wedge \tau_B, S_{T \wedge \tau_B}) = f(S_T)$  si  $\tau_B > T$  et 0 sinon. On conclut que  $V_t$  est la valeur d'un portefeuille autofinçant qui réplique le prix de l'option à barrière Up and Out. Il contient  $\frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t)$  unités du sous-jacent à toute date  $t < \tau_B$  et devient identiquement nul à la date  $\tau_B$ .

**Réplication statique** Contrairement aux Calls et Puts européens, le delta d'une option à barrière n'est pas borné, ce qui rend difficile la réplication dynamique de ces options. Nous présenterons maintenant une stratégie de couverture pour les options à barrière qui utilise seulement des positions statiques en options européennes, due à Carr et al. [1998]. La méthode est basée sur le lemme suivant :

**Lemme 1.** *Dans le modèle de Black-Scholes,*

$$EUR_t(S_t, f(S_T), T) = EUR_t \left( S_t, \left( \frac{S_T}{S_t} \right)^\gamma f \left( \frac{S_t^2}{S_T} \right), T \right), \quad (5.15)$$

avec  $\gamma = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$  où  $r$  est le taux d'intérêt et  $\sigma$  la volatilité.

*Démonstration.* Commençons par observer que

$$\left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\gamma = e^{\sigma\gamma W_T - \frac{1}{2}(\sigma\gamma)^2 T}$$

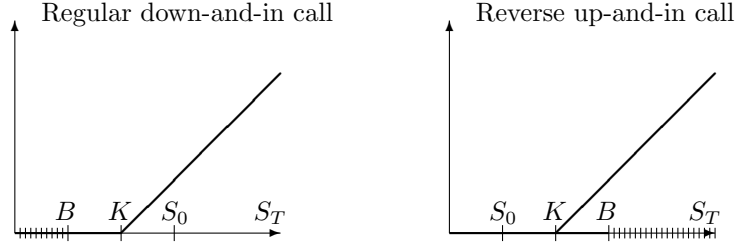


FIGURE 5.1 – Types d'options à barrière.

est d'espérance 1 et nous pouvons introduire une probabilité  $\tilde{\mathbb{Q}}$  via

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\gamma.$$

Par le théorème de Girsanov, sous cette probabilité  $\tilde{W}_s = W_s - \sigma\gamma s$  est un mouvement brownien. Par ailleurs,

$$\frac{S_0^2}{S_T} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T - \sigma\tilde{W}_T},$$

ce qui montre que la loi de  $\frac{S_0^2}{S_T}$  sous  $\tilde{\mathbb{Q}}$  est la même que la loi de  $S_T$  sous  $\mathbb{Q}$ . On en déduit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} f(S_T)] = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[e^{-rT} f\left(\frac{S_0^2}{S_T}\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^\gamma f\left(\frac{S_0^2}{S_T}\right)\right]$$

En appliquant le même résultat entre  $t$  et  $T$ , la démonstration est terminée.  $\square$

La méthode que nous allons décrire s'applique à tous les modèles qui possèdent une propriété de symétrie de ce type.

Une option à barrière est dite *regular* si la fonction pay-off est nulle à la barrière et au-delà, et *reverse* sinon (voir Fig. 5.1 pour une illustration). Les relations (5.12)–(5.14) impliquent que pour déterminer la couverture pour une option à barrière quelconque, il est suffisant d'étudier les options de type In Regular. De plus, les options Up et Down peuvent être traité de la même manière. Nous allons donc nous concentrer sur les options Up and In Regular dans la suite.

**Réplication d'options Regular** Soit  $f$  la fonction pay-off d'une option Up and In Regular. On a donc  $f(z) = 0$  pour  $z \geq B$ . Soit  $\tau_B$  le premier temps de passage par le processus de prix au-dessus du niveau  $B$ . On considère la stratégie de couverture suivante :

- A la date  $t$ , acheter l'option européenne  $\text{EUR}_t\left(S_t, \left(\frac{S_T}{B}\right)^\gamma f\left(\frac{B^2}{S_T}\right), T\right)$ .
- Lorsque la barrière est atteinte (si jamais), vendre  $\text{EUR}_{\tau_B}\left(B, \left(\frac{S_T}{B}\right)^\gamma f\left(\frac{B^2}{S_T}\right), T\right)$  et acheter  $\text{EUR}_{\tau_B}(B, f(S_T), T)$ . Cette transaction à un prix nul grâce à la relation de symétrie (5.15).



Il est facile de vérifier que cette stratégie réplique l'option  $UI_t(S_t, f(S_T), T)$ . De plus, on en déduit la formule de pricing suivante :

$$\begin{aligned} UI_t(S_t, B, f(S_T), T) &= \text{EUR}_t \left( S_t, \left( \frac{S_T}{B} \right)^\gamma f \left( \frac{B^2}{S_T} \right), T \right) \\ &= \left( \frac{S_t}{B} \right)^\gamma \text{EUR}_t \left( S_t, f \left( \frac{B^2}{S_t^2} S_T \right), T \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

**Le cas de calls et puts** Equation (5.16) montre que le prix d'une option In Regular peut être exprimé en termes du prix de l'option européenne correspondante, par exemple,

$$UIP_t(S_t, B, K, T) = \left( \frac{S_t}{B} \right)^{\gamma-2} \text{Put}_t \left( \frac{KS_t^2}{B^2}, T \right).$$

Cependant, sauf si  $\gamma = 1$ , la stratégie de réplication fait intervenir des options européennes autres que calls et puts. Si  $\gamma = 1$  (c'est-à-dire que le taux sans risque est nul), les options In Regular peuvent être répliqués statiquement avec une seule option call / put. Par exemple,

$$\begin{aligned} \text{EUR}_t \left( S_t, \left( \frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left( K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+, T \right) &= \text{EUR}_t \left( S_t, \left( \frac{KS_T}{B} - B \right)^+, T \right) \\ &= \frac{K}{B} \text{Call}_t \left( \frac{B^2}{K}, T \right). \end{aligned}$$

La réplication des options Reverse fera intervenir des pay-offs autres que call / put même si  $\gamma = 1$ .

La réplication d'options Regular lorsque  $\gamma \neq 1$  est basée sur le résultat suivant.

**Lemme 2.** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable, dont la deuxième dérivée est continue par morceaux. Alors pour tous  $F, x$  positifs,

$$f(x) = f(F) + f'(F)(x - F) + \int_0^F f''(K)(K - x)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)(x - K)^+ dK.$$

*Démonstration.* Laissez en exercice. □

Dans le cas d'une option Put Up and In Regular, la fonction à répliquer est

$$\left( \frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left( K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left( \frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left( \frac{KS_T}{B^2} \right)^{\gamma-1} \left( S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

Cette fonction n'est pas différentiable deux fois mais elle vérifie

$$\left( \frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left( K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left( \frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} f(S_T) + \left( \frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left( S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

avec

$$f(x) = \left( \left( \frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) \left( x - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

Les dérivées de la fonction  $f$  sont données par

$$f'(x) = \left\{ \gamma \left( \frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-1} + (1-\gamma) \left( \frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-2} - 1 \right\} \mathbf{1}_{x \geq \frac{B^2}{K}}$$

$$f''(x) = (\gamma-1) \left( \frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-2} \left\{ \frac{\gamma K}{B^2} - \frac{\gamma-2}{x} \right\} \mathbf{1}_{x \geq \frac{B^2}{K}}.$$

Au final, prenant  $F = \frac{B^2}{K}$  dans Lemma 2, on a

$$\left( \frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left( K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left( \frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left( S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+ + \int_{B^2/K}^\infty \left( \frac{B}{x} \right)^{2-\gamma} \left\{ \frac{\gamma K}{B^2} - \frac{\gamma-2}{x} \right\} (S_T - x)^+ dx.$$

## 5.4 Swaps de variance

Un autre exemple d'application du principe de réplcation statique est donné par les swaps de variance. Les swaps de variance sont des actifs contingents qui permettent de prendre des positions sur la volatilité (variance) de sous-jacent. Un swap de variance a un pay-off à l'échéance égal à

$$H_T = \frac{NA}{n} \sum_{i=1}^n \left( \log \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 - N\sigma_K^2,$$

où

- $A = 250$  est le nombre moyen de jours ouvrés dans l'année ;
- $N$  est le nominal du contrat ;
- $n$  représente le nombre de jours ouvrés jusqu'à l'échéance  $T$  ;
- $\sigma_K$  est la volatilité 'strike'.

En d'autres mots, un swap de variance permet d'échanger un montant fixe  $N\sigma_K^2$  contre un flux aléatoire égal à la variance réalisée du sous-jacent.

Dans un modèle à trajectoires continues, un swap de variance peut être repliqué par un portefeuille statique contenant des options européennes et un portefeuille dynamique contenant le sous-jacent [Carr and Madan, 1998]. Pour simplifier le traitement, on va approcher la somme dans le pay-off de produit par une intégrale :

$$H_T = N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds - \sigma_K^2 \right\}.$$

Supposons que le sous-jacent  $S$  est décrit par

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

où  $\mu_t$  et  $\sigma_t$  sont deux processus stochastiques. La formule d'Itô donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0}. \quad (5.17)$$

Pour répliquer la variance intégrée, il suffit alors de répliquer les deux termes dans la partie droite.

Soit  $V_t$  la valeur du portefeuille qui réplique  $\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}$  et soit  $Q$  une probabilité risque-neutre. On a alors

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} E \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left\{ \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + r(T-t) \right\} \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$dV_t = r(V_t - \delta_t S_t) dt + \delta_t dS_t \quad \text{avec} \quad \delta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}.$$

Le premier terme de la partie droite de (5.17) peut donc être répliqué par un portefeuille autofinçant consistant à investir  $e^{-r(T-t)}$  en actions et ayant la valeur initiale  $V_0 = rT e^{-rT}$ .

Le deuxième terme dans la partie droite de (5.17) (le log-contrat) peut être répliqué par un portefeuille statique de calls et puts en utilisant la représentation du Lemme 2. Pour calculer le prix d'une option européenne d'échéance  $T$  et de pay-off  $f(S_T) = \log \frac{S_T}{S_0}$ , on pose  $F = S_0 e^{rT}$  et calcule l'espérance de  $e^{-rT} f(S_T)$  sous la probabilité risque-neutre en utilisant la représentation du Lemme 2 :

$$\text{Prix} = e^{-rT} rT - \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK,$$

où  $P(T, K)$  est le prix d'un put et  $C(T, K)$  le prix d'un call d'échéance  $T$  et strike  $K$ . En rajoutant ceci au prix du portefeuille de replication pour le premier terme de (5.17), on trouve que le prix du portefeuille de replication pour  $\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds$  est égal à

$$\int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

Finalement, le  $\sigma_K$  qui annule la valeur du swap de variance satisfait

$$e^{-rT} \sigma_K^2 = \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

**L'indice VIX** VIX est l'indice de volatilité d'options sur S&P 500, publié par CBOE. Entre 1993 et 2003, cet indice était calculé comme la moyenne des volatilités implicites de 8 options les plus liquides, mais en 2003 la méthodologie a été changée, et le nouvel indice est calculé en prenant en compte toutes les options par la formule (5.4). Le rapport publié sur le site de CBOE (faites un recherche google sur "vix white paper") donne la nouvelle formule : on calcule

$$VIX_T^2 = \frac{2e^{rT}}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_i(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2,$$

pour les deux échéances les plus courtes  $T_1$  et  $T_2$ , où

- $Q_i$  est le prix de l'option (call ou put) qui est hors de la monnaie pour le strike  $K_i$  ;
- $F$  est le forward calculé par la parité call-put ;
- $K_0$  est le plus grand strike qui est plus petit que le forward ;
- $\Delta K_i$  est l'intervalle entre les strikes.

Le troisième terme est un terme de correction :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^F \frac{P(K) - C(K)}{K^2} dK \\
&\approx \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK - \frac{e^{-rT} (F - K_0)^2}{T K_0^2}.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'indice VIX, on fait une interpolation linéaire entre  $VIX_{T_1}$  et  $VIX_{T_2}$  pour arriver à une maturité de 30 jours.

## 5.5 Finance model-free et valorisation robuste des options à barrière

Voir Brown et al. [2001].

### Annexe : résumé des résultats du calcul stochastique utilisés dans ce chapitre

**Représentation des martingales dans la filtration brownienne** Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , soit  $\mathbb{F}$  la filtration canonique du mouvement brownien complétée par les ensembles de mesure nulle, et soit  $F \in \mathcal{F}_T$ . On note par  $\mathcal{H}^2$  l'ensemble des processus adaptés mesurables  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tels que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T H_s^2 ds \right] < \infty.$$

**Théorème 10** (Représentation des martingales, cas  $\mathcal{H}^2$ ). *Pour tout  $F \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  il existe un unique processus  $H \in \mathcal{H}^2$  tel que*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T H_s dW_s.$$

La condition  $H \in \mathcal{H}^2$  est nécessaire pour avoir l'unicité. On note par  $\mathcal{H}_{loc}^2$  l'ensemble des processus adaptés mesurables  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tels que

$$\int_0^T H_s^2 ds < \infty \quad \text{p.s.}$$

## 5.5. FINANCE MODEL-FREE ET VALORISATION ROBUSTE DES OPTIONS À BARRIÈRE85

**Théorème 11** (Représentation des martingales, cas général). *Pour tout  $F \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  il existe un processus  $H \in \mathcal{H}_{loc}^2$  tel que*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T H_s dW_s.$$

*Exemple 7.* Soit  $W$  un mouvement brownien standard en dimension 1 et

$$\tau := \inf\{t \geq \frac{1}{2} : \int_0^t \frac{dW_s}{1-s} = 0\}.$$

On pose  $M_t = \int_0^t \frac{dW_s}{1-s}$ . Par la définition du mouvement brownien, il est facile de montrer que  $B_t = M_{\frac{t}{1+t}}$  est un mouvement brownien standard. Cela implique que

$$\tau = \frac{\sigma}{1+\sigma}, \quad \text{avec } \sigma = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$$

et que donc  $\tau < 1$  p.s. On a démontré

$$\phi_t = \frac{\mathbf{1}_{t \leq \tau}}{1-t}$$

appartient à  $\mathcal{H}_{loc}^2$  et vérifie

$$\int_0^T \phi_s dW_s = 0.$$

Puisque manifestement le processus  $\phi'_s \equiv 0$  vérifie la même condition, la représentation de la variable aléatoire nulle par des processus dans  $\mathcal{H}_{loc}^2$  n'est pas unique.

### Changement de probabilité

**Théorème 12** (Théorème de Girsanov). *Soit  $\phi \in \mathcal{H}_{loc}^2$ , et*

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \phi_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\phi_s\|^2 ds\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Supposons que  $\mathbb{E}[Z_T] = 1$ . Alors le processus*

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \phi_s ds$$

*est un mouvement brownien sous la probabilité  $\mathbb{Q} = Z_T \mathbb{P}$ .*

**Théorème 13** (Condition de Novikov). *Supposons que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\phi_s\|^2 ds\right)\right] < \infty.$$

*Alors  $\mathbb{E}[Z_T] = 1$  et le processus  $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale.*

**Lemme 3** (Changement de probabilité dans l'espérance conditionnelle). *Soit  $\mathbb{Q}$  une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  et  $D_t = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$ . Alors*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{D_s} \mathbb{E}[D_t X_t | \mathcal{F}_s].$$

*Preuve du lemme.* Il faut montrer que pour tout  $A \in \mathcal{F}_s$ ,

$$\mathbb{E}^Q[X_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^Q \left[ \frac{1}{D_s} \mathbb{E}^P [D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right]$$

Mais la partie droite de cette égalité vérifie

$$\mathbb{E}^Q \left[ \frac{1}{D_s} \mathbb{E}^P [D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right] = \mathbb{E}^P [\mathbb{E}^P [D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^P [D_t X_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^Q [X_t \mathbf{1}_A].$$

□

## Chapitre 6

# Introduction aux modèles de la courbe de taux

*Ce chapitre est tiré du polycopié du cours “Modèles Stochastiques en Finance” de l’Ecole Polytechnique, écrit par P. Tankov et N. Touzi*

In this chapter, we provide an introduction to the modelling of the term structure of interest rates. We will develop a pricing theory for securities that depend on default-free interest rates or bond prices. The general approach will exploit the fact that bonds of many different maturities are driven by a few common factors. Therefore, in contrast with the previous theory developed for finite securities markets, we will be in the context where the number of traded assets is larger (in fact infinite) than the number of sources of randomness. It should be noted that default-free interest rates are, to a certain extent, an abstraction, and that most derivative products in interest rate markets depend on the Libor rates which can no longer be assumed default-free after the subprime crisis of 2007-2008.

The first models introduced in the literature stipulate a dynamics of the instantaneous interest rate process *under the risk neutral measure*  $\mathbb{Q}$ , which is assumed to exist. The prices of bonds of all maturities are then deduced by computing the expected values of the corresponding discounted payoff under  $\mathbb{Q}$ . We shall provide a detailed analysis of the most representative model of this class, namely the Vasicek model. An important limitation of this class of models is that the yield curve predicted by the model does not match the observed yield curve, i.e. the calibration to the spot yield curve is not possible.

The Heath-Jarrow-Morton approach (1992) solves this calibration problem by taking the spot yield curve as the initial condition for the dynamics of the entire yield curve. The dynamics of the yield curve is driven by a finite-dimensional Brownian motion. In order to exclude all possible arbitrage opportunities, we will assume the existence of a risk neutral probability measure, for all bonds with all maturities. In the present context of a large financial market, this condition leads to the so-called Heath-Jarrow-Morton restriction which states that the dynamics of the yield curve is defined by the volatility process of zero-coupon bonds together with a risk premium process which is common to all bonds with all maturities.

Finally, a complete specification of an interest rates model requires the specification of the volatility of bonds. As in the context of finite securities markets, this is achieved by calibration

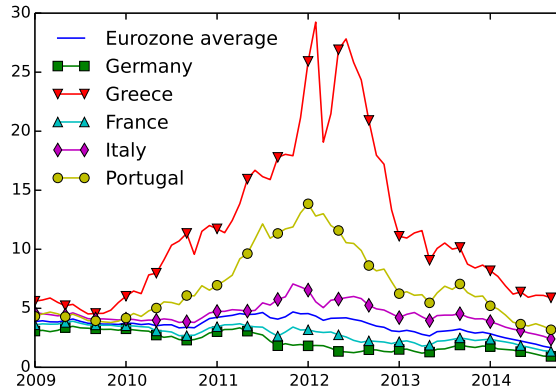


FIGURE 6.1 – Long term (10 year) sovereign bond yields for selected Eurozone countries, compared to Eurozone average. Data source : ECB.

to the options markets. We therefore provide an introduction to the main tools for the analysis of fixed income derivatives. An important concept is the notion of *forward neutral measure*, which turns the forward price processes with pre-specified maturity into martingales. In the simplest models defined by deterministic volatilities of zero-coupon bonds, this allows to express the prices of European options on zero-coupon bonds in closed form by means of a Black-Scholes-type formula. The structure of implied volatilities extracted from these prices provides a powerful tool for the calibration of the yield curve to spot interest rates and options.

## 6.1 Fixed income terminology

### 6.1.1 Zero-coupon bonds

Throughout this chapter, we will denote by  $P_t(T)$  the price at time  $t$  of a pure discount bond paying 1 at date  $T \geq t$  and not subject to any default risk. By definition, we have  $P_T(T) = 1$ .

A risk-free discount bond is an abstraction, since any actual loan in financial markets is necessarily subject to some amount of default risk, however small it may be. Indeed, prior to the start of the Eurozone sovereign debt crisis in 2009, government bonds of developed countries were largely considered risk-free, however, after the start of the crisis a strong divergence of sovereign bond yields of different eurozone countries was observed (see Figure 6.1). Since the bonds are denominated in the same currency (Euro), this divergence can only be attributed to differences in default risk.

Nowadays the prices of risk-free discount bonds are computed from the so called Overnight Indexed Swap (OIS) rates. This instrument will be discussed in detail in the following chapter.

Since the number of maturities is typically large, the models developed below allow for trading the zero-coupon bonds  $P_t(T)$  for any  $T > t$ . We are then in the context of infinitely many risky assets. This is a first major difference with the theory of derivative securities on stocks developed in previous chapters.

The second feature of bond markets which makes them different from the equity markets we



discussed until now is that the zero-coupon bond with maturity  $T$  ceases to exist at this date. This leads to a strong time-dependence in the dynamics of the zero-coupon bond prices.

Given the prices of all zero-coupon bonds, one can derive an un-ambiguous price of any deterministic income stream : consider an asset which pays  $F_i$  at each time  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Then the no-arbitrage price at time 0 of this asset is

$$\sum_{i=1}^n F_i P_0(T_i).$$

If  $F_i$  is random, the above formula does not hold true, as the correlation between  $F_i$  and interest rates enters into the picture.

*Coupon-bearing bonds* are quoted on financial markets. If the default risk is negligible, their prices are obviously related to the prices of zero-coupon bonds by

$$P_0 = \sum_{i=1}^n c P_0(T_i) + K P_0(T) = \sum_{i=1}^n \rho K P_0(T_i) + K P_0(T)$$

where  $c = \rho K$  is the coupon corresponding to the pre-assigned interest  $\rho > 0$ ,  $T_1 \leq \dots \leq T_n \leq T$  are the dates where the coupons are paid, and  $K$  is the Principal (or face value) to be paid at the maturity  $T$ .

The *yield to maturity* is defined as the (unique!) scalar  $Y_0$  such that

$$P_0 = \sum_{i=1}^n c e^{-Y_0 T_i} + K e^{-Y_0 T}$$

The bond is said to be priced

- at par if  $\rho = Y_0$ ,
- below par if  $\rho < Y_0$ ,
- above par if  $\rho > Y_0$ .

On the US market, Government debt securities are called :

- Treasury bills (T-bills) : zero-coupon bonds with maturity  $\leq 1$  year,
- Treasury notes (T-notes) : coupon-bearing with maturity  $\leq 10$  years,
- Treasury bonds (T-bonds) : coupon-bearing with maturity  $> 10$  years.

A government bond is traded in terms of its price which is quoted as a percentage of its face value.

### 6.1.2 Yields from zero-coupon bonds

We define the yields corresponding to zero-coupon bonds by

$$P_t(T) = e^{-(T-t)R_t(T)}, \text{ i.e. } R_t(T) := \frac{-\ln P_t(T)}{T-t}.$$

The *term structure of interest rates* represents at each time  $t$  the curve  $T \mapsto R_t(T)$  of yields on zero-coupon bonds for all maturities  $T > 0$ . It is also commonly called *the yields curve*.

In practice, there are many different term structures of interest rates, depending on whether zero-coupon bonds are deduced

- from the OIS rates
- from observed rates of interest rate swaps indexed to the Libor rate (see the following chapter)
- from observed prices of bonds issued by the government of a specific country, or by a firm with a specific default rating

We conclude this section by the some stylized facts observed on real financial markets data :

- a. Short term interest rates are strongly related to the monetary policy implemented by the central bank. For example, large euro zone banks can borrow funds from the ECB at the refinancing rate, and the funds parked overnight at the ECB are accrued at the deposit rate. The short-term risk free interest rate must therefore lay between these two rates at all times. By contrast, long term interest rates are determined by market mechanisms such as supply and demand of bonds and creditor confidence.
- b. Interest rates are generally positive, however on rare occasions short term interest rates may take small negative values. For example, on November 6th, 2014, EONIA rate (average rate for overnight interbank loans, the closest proxy for the instantaneous risk-free rate) was equal to  $-0.037\%$ . This is explained by extremely low rates fixed by the European Central Bank to boost growth in the Euro Zone. On this day, the deposit rate was  $-0.2\%$  (which means that banks must actually pay to deposit funds with the ECB) and the refinancing rate was  $0.05\%$ . Interestingly, negative interest rates are allowed by simple Gaussian models studied in this chapter (with a small probability!) whereas they are not permitted by most more advanced models.
- c. The term structure of interest rates exhibits different shapes : (almost) flat, increasing (most frequently observed), decreasing, decreasing for short term maturities then increasing, increasing for short term maturities then decreasing. Examples of observed US Treasury yield curves are displayed in Figure 6.2 below.
- d. Interest rates exhibit *mean reversion*, i.e. oscillate around some average level and tend to be attracted to it. This level can itself slowly change through time depending on the business cycles of the economy. See Figure 6.3 below.
- e. Interest rates for various maturities are not perfectly correlated.
- f. Short term interest rates are more volatile than long term interest rates, and can even exhibit jumps on the days when a monetary policy decision is made by the central bank. See Figure 6.3

### 6.1.3 Forward Interest Rates

The forward rate  $F_t(T, T+h)$  is the rate at which agents are willing, at date  $t$ , to borrow or lend money over the period  $[T, T+h]$ . It can be deduced directly from the zero-coupon bonds  $\{P_t(T), T \geq t\}$  by comparing the following two strategies :

- Buy one zero-coupon bond with maturity  $T$ , then at date  $T$ , place the pay-off of the bond at the forward rate  $F_t(T, T+h)$  until date  $T+h$ .
- Buy  $e^{hF_t(T, T+h)}$  discount bonds with maturity  $T+h$ .

Since both strategies are self-financing and have the same terminal pay-off at date  $T+h$ , by no arbitrage argument we must have

$$P_t(T) = P_t(T+h)e^{hF_t(T, T+h)} \quad \text{and therefore} \quad F_t(T, T+h) = \frac{1}{h} \log \frac{P_t(T)}{P_t(T+h)},$$

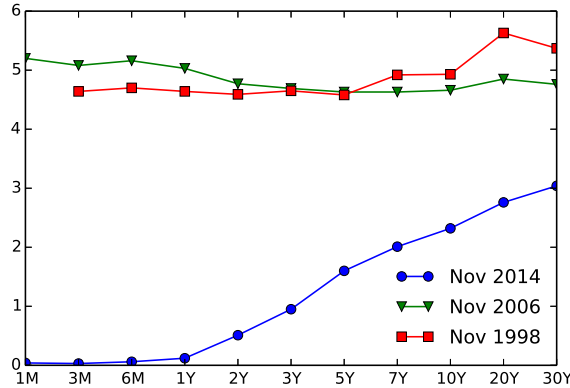


FIGURE 6.2 – Observed US Treasury yield curves. Source : US Department of the Treasury.

or, in terms of yields to maturity,

$$F_t(T, T + h) = \frac{1}{h} \{(T + h)R_t(T + h) - TR_t(T)\}.$$

This definition of the forward rate assumes continuous compounding between  $T$  and  $T + h$ ; sometimes (such as in forward rate agreements) simple compounding is used.

#### 6.1.4 Instantaneous interest rates

The instantaneous interest rate is given by

$$r_t = R_t(t).$$

It does not correspond to any tradable asset, and is not directly observable. However, assuming that the market admits a risk neutral measure  $\mathbb{Q}$ , it follows from the valuation theory developed in the previous chapter that :

$$P_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Hence, given the dynamics of the instantaneous interest rates under  $\mathbb{Q}$ , we may deduce the prices of zero-coupon bonds.

Similarly, one defines the instantaneous forward rate :

$$f_t(T) = \lim_{h \downarrow 0} F_t(T, T + h) = -\frac{\partial}{\partial T} \{\ln P_t(T)\}.$$

or, in terms of yields to maturity,

$$f_t(T) = \frac{\partial}{\partial T} \{(T - t)R_t(T)\}.$$

Conversely, zero-coupon bonds and the corresponding yields can be defined from instantaneous forward rates :

$$R_t(T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T F_t(u) du, \quad P_t(T) = e^{-\int_t^T f_t(u) du}.$$

The set of instantaneous forward rates for all maturities  $(f_t(T))_{T \geq t}$  therefore offers an alternative parameterization of the yield curve.

## 6.2 The Vasicek model

The Vasicek model (1977) assumes that the the instantaneous interest rate is given by

$$\begin{aligned} r_t &= e^{-\lambda t} r_0 + m\lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} ds + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s \\ &= e^{-\lambda t} r_0 + m(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s, \end{aligned}$$

where  $B$  is a Brownian motion under the risk neutral measure  $\mathbb{Q}$ . Observe that the above stochastic integral is well-defined.

An immediate application of Itô's formula provides the following dynamics of the interest rates process :

$$dr_t = \lambda(m - r_t)dt + \sigma dB_t.$$

this is the so-called Ornstein-Uhlenbeck process in the theory of stochastic processes. Observe that this process satisfies the mean reversion property around the level  $m$  with intensity  $\lambda$  :

- if  $r_t < m$ , then the drift is positive, and the interest rate is pushed upward with the intensity  $\lambda$ ,
- if  $r_t > m$ , then the drift is negative, and the interest rate is pushed downward with the intensity  $\lambda$ .

The process  $\{r_t, t \geq 0\}$  is a Gaussian process with mean

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[r_t] = m + (r_0 - m) e^{-\lambda t}, t \geq 0,$$

and covariance function

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{\mathbb{Q}}[r_t, r_s] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dB_u \int_0^s e^{-\lambda(s-u)} dB_u \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\lambda} \left( e^{-\lambda|t-s|} - e^{-\lambda(t+s)} \right), \text{ for } s, t \geq 0. \end{aligned}$$

In particular, this model allows for negative interest rates with positive (but small) probability!

For fixed  $t > 0$ , the distribution under  $\mathbb{Q}$  of  $r_t$  is  $\mathbf{N} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[r_t], \text{Var}^{\mathbb{Q}}[r_t] \right)$ , which converges to the stationary distribution

$$\mathbf{N} \left( m, \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right) \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

### 6.2.1 Zero-coupon bonds prices

Since the pay-offs of interest rate derivatives such as bond options do not depend on the instantaneous interest rate but rather on future zero-coupon bond rates, it is important to be able to compute and simulate the values of zero-coupon bonds.

Recall that the price at time  $t$  of a zero-coupon bond with maturity  $T$  is given by

$$P_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

In order to compute this expectation, we shall now evaluate the distribution of the random variable  $\int_t^T r_s ds$  by integrating

$$r_s = m + (r_t - m)e^{-\lambda(s-t)} + \sigma \int_t^s e^{-\lambda(s-u)} dB_u.$$

This gives

$$\int_t^T r_s ds = m(T-t) + (r_t - m) \int_t^T e^{-\lambda(s-t)} ds + \sigma \int_t^T \int_t^s e^{-\lambda(s-u)} dB_u \quad (6.1)$$

$$= m(T-t) + (r_t - m) \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} + \sigma \int_t^T \int_t^s e^{-\lambda(s-u)} dB_u. \quad (6.2)$$

To derive the distribution of the last double integral, we need to reverse the order of integration. To do this, we introduce the process  $Y_t := \int_0^t e^{\lambda u} dB_u$ ,  $t \geq 0$ , and we compute by Itô's formula that

$$d(e^{-\lambda t} Y_t) = e^{-\lambda t} dY_t - \lambda e^{-\lambda t} Y_t dt = dB_t - \lambda e^{-\lambda t} Y_t dt.$$

Integrating between  $t$  and  $T$  and recalling the expression of  $Y_t$ , this provides :

$$\begin{aligned} \int_t^T \lambda e^{-\lambda s} \int_t^s e^{\lambda u} dB_u dt &= B_T - B_t - e^{-\lambda T} Y_T + e^{-\lambda T} Y_t \\ &= \int_t^T (1 - e^{-\lambda(T-s)}) dB_s. \end{aligned}$$

Plugging this expression into (6.1), we obtain :

$$\int_t^T r_s ds = m(T-t) + (r_t - m) \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} + \sigma \int_t^T \Lambda(T-s) dB_s$$

where

$$\Lambda(u) := \frac{1 - e^{-\lambda u}}{\lambda}.$$

This shows that, conditionally on  $\mathcal{F}_t$ ,

$$\int_t^T r_s ds \sim \mathcal{N} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \text{Var}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \right), \quad (6.3)$$

where

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_0^T r_t dt \right] &= m(T-t) + (r_t - m) \lambda(T-t) \\ \text{Var}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_0^T r_t dt \right] &= \sigma^2 \int_t^T \Lambda(T-u)^2 du.\end{aligned}$$

Given this explicit distribution, we can deduce the price at any time  $t \geq 0$  of the zero-coupon bonds with all maturities :

$$P_t(T) = \exp \left[ -m(T-t) - (r_t - m) \Lambda(T-t) + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T \Lambda(T-u)^2 du \right] \quad (6.4)$$

for  $T \geq t \geq 0$ . This in particular implies that zero-coupon bonds in the Vasicek model follow a log-normal distribution, and bond option can therefore be priced with a Black-Scholes-type formula. The term structure of interest rates is also immediately obtained :

$$R_t(T) = \frac{-\ln P_t(T)}{T-t} = m + (r_t - m) \frac{\Lambda(T-t)}{T-t} - \frac{\sigma^2}{2(T-t)} \int_t^T \Lambda(T-u)^2 du \quad (6.5)$$

**Exercise 2.** Show that the joint distribution of the pair  $(r_T, \int_0^T r_t dt)$  is Gaussian, and provide its characteristics in explicit form. *Hint* : compute its Laplace transform.

We conclude this section by deducing from (6.4) the dynamics of the price process of the zero-coupon bonds, by a direct application of Itô's formula. An important observation for this calculation is that the drift term in this differential representation is already known to be  $dP_t(T) = P_t(T)r_t dt + \dots dB_t$ , since  $\{P_t(T), 0 \leq t \leq T\}$  is the price of a security traded on the financial market. Therefore, we only need to compute the volatility coefficient of the zero-coupon price process. This is immediately obtained from (6.4) :

$$\frac{dP_t(T)}{P_t(T)} = r_t dt - \sigma \Lambda(T-t) dB_t, t < T.$$

### 6.2.2 Calibration to the spot yield curve and the generalized Vasicek model

An important requirement that the interest rate must satisfy is to reproduce the observed market data for the zero-coupon bond prices

$$B_0^*(T), T \geq 0,$$

or equivalently, the spot yield curve at time zero

$$R_0^*(T), T \geq 0,$$

or equivalently the spot instantaneous forward rates curve

$$f_0^*(T), T \geq 0,$$

In practice, the prices of the zero-coupon bonds for some given maturities are either observed (for maturities shorter than one year), or extracted from coupon-bearing bonds or interest rates swaps; the yield curve is then constructed by an interpolation method.

Since the Vasicek model is completely determined by the choice of the four parameters  $r_0$ ,  $\lambda$ ,  $m$ ,  $\sigma$ , there is no hope for the yield curve (6.5) predicted by this model to match a given observed spot yield curve  $R_0^*(T)$  for every  $T \geq 0$ . In other words, the Vasicek model cannot be calibrated to the spot yield curve.

Hull and White (1992) suggested a slight extension of the Vasicek model which solves this calibration problem. In order to meet the infinite number of constraints imposed by the calibration problem, they suggest to model the instantaneous interest rates by

$$r_t = a(t) + X_t \quad \text{where} \quad X_t = \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s,$$

where  $a(\cdot)$  is a deterministic function to be determined by the calibration procedure. This extension increases the number of parameters of the model, while keeping the main features of the model : mean reversion, Gaussian distribution, etc.

All the calculations of the previous section can be reproduced in this context. One can show that the above extension of the Vasicek model defines a Gaussian process. The distribution of the integrated interest rate  $\int_t^T r_s ds$  can also be shown to be Gaussian, and its mean and variance can be computed explicitly. The details of these computations are left as an exercise for the reader. In particular, the future values of the zero-coupon bond prices are given by the formula

$$P_t(T) = e^{-\int_t^T a(s) ds} \exp \left[ -X_t \Lambda(T-t) + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T \Lambda(T-u)^2 du \right]. \quad (6.6)$$

Assuming that the initial zero-coupon bond prices  $P_0(T)$  are known, one can eliminate the function  $a$  :

$$P_t(T) = \frac{P_0(T)}{P_0(t)} \exp \left[ -X_t \Lambda(T-t) + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t (\Lambda(t-u)^2 - \Lambda(T-u)^2) du \right].$$

This formula gives the dynamics of the zero-coupon bonds for the Hull-White extension of the Vasicek model calibrated to the initial term structure of the interest rates.

Of course, such a calibration must be updated regularly since the evolution of the term structure predicted by the model does not necessarily coincide with the actual observed evolution. This means that the function  $a(\cdot)$  which is supposed to be deterministic, will typically be changed at every run of the calibration procedure. Hence, similarly to the implied volatility parameter in the case of European options on stocks, the Hull-White model is based on Gaussian dynamics, but its practical implementation violates its founding assumptions by allowing for a stochastic evolution of the shift functional  $a(\cdot)$ .

## 6.3 Introduction to the Heath-Jarrow-Morton modeling approach

### 6.3.1 Dynamics of the forward rates curve

These models were introduced in 1992 in order to overcome the two following shortcomings of factor models :

- Factor models ignore completely the distribution under the statistical measure, and take the existence of the risk neutral measure as granted. In particular, this implies an inconsistency between these models and those built by economists for the purpose of interest rate prediction.
- The calibration of factor models to the spot yield curve is artificial. First, the structure of the yield curve implied by the model has to be computed, then the parameters of the model have to be fixed so as to match the observed yield curve. Furthermore, the calibration must be updated regularly, leading to an inconsistency of the model.

Heath-Jarrow-Morton suggest to directly model the dynamics of the observable yield curve. Given the spot instantaneous forward rate curve,  $f_0(T)$  for all maturities  $0 \leq T \leq \bar{T}$ , the dynamics of the forward rate curve is defined by :

$$\begin{aligned} f_t(T) &= f_0(T) + \int_0^t \alpha_u(T) du + \int_0^t \sigma_u(T) \cdot dW_u \\ &= f_0(T) + \int_0^t \alpha_u(T) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_u^i(T) dW_u^i \end{aligned}$$

where  $W$  is a Brownian motion under the statistical measure  $\mathbb{P}$  with values in  $\mathbb{R}^n$ , and  $\{\alpha_t(T), t \leq \bar{T}\}$ ,  $\{\sigma_t^i(T), t \leq \bar{T}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , are adapted processes for every fixed maturity  $T$ . Throughout this section, we will assume that all stochastic integrals are well-defined, and we will ignore all technical conditions needed for the subsequent analysis.

### 6.3.2 The Heath-Jarrow-Morton drift condition

The first important question is whether such a model allows arbitrage. Indeed, one may take advantage of the infinite number of assets available for trading in order to build an arbitrage opportunity. To answer the question, we shall derive the dynamics of the price process of zero-coupon bonds, and impose the existence of a risk neutral measure for these tradable securities. This is a sufficient condition for the absence of arbitrage opportunities, as the discounted wealth process corresponding to any portfolio strategy would be turned into a local martingale under the risk neutral measure, hence to a supermartingale thanks to the finite credit line condition. The latter supermartingale property guarantees that no admissible portfolio of zero-coupon bonds would lead to an arbitrage opportunity.

We first observe that

$$\begin{aligned} d \int_t^T f_t(u) du &= -f_t(t) dt + \int_t^T df_t(u) du \\ &= -r_t dt + \int_t^T \alpha_t(u) du dt + \int_t^T \sigma_t(u) du \cdot dW_t \\ &= -r_t dt + \gamma_t(T) dt + \Gamma_t(T) \cdot dW_t \end{aligned}$$

where we introduced the adapted processes :

$$\gamma_t(T) = \int_t^T \alpha_t(u) du \text{ and } \Gamma_t(T) = \int_t^T \sigma_t(u) du$$



Since  $P_t(T) = e^{-\int_t^T f_t(u)du}$ , it follows from Itô's formula that

$$dP_t(T) = P_t(T) \left[ \left( r_t - \gamma_t(T) + \frac{1}{2} |\Gamma_t(T)|^2 \right) dt - \Gamma_t(T) \cdot dW_t \right]$$

We next impose that the zero-coupon bond price satisfies the risk neutral dynamics :

$$\frac{dP_t(T)}{P_t(T)} = r_t dt - \Gamma_t(T) \cdot dB_t$$

where

$$B_t := W_t + \int_0^t \lambda_u du, t \geq 0,$$

defines a Brownian motion under some risk neutral measure  $\mathbb{Q}$ , and  $\{\lambda_t, t \geq 0\}$  is the so-called risk premium process, which is adapted,  $\mathbb{R}^n$ -valued and independent of the maturity variable  $T$ . This leads to the Heath-Jarrow-Morton drift condition :

$$\Gamma_t(T) \cdot \lambda_t = \gamma_t(T) - \frac{1}{2} |\Gamma_t(T)|^2. \quad (6.7)$$

Recall that

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T}(t, T) = \alpha(t, T) \text{ and } \frac{\partial \Gamma}{\partial T}(t, T) = \sigma(t, T).$$

Then, differentiating with respect to the maturity  $T$ , we see that

$$\sigma_t(T) \cdot \lambda_t = \alpha_t(T) - \sigma_t(T) \cdot \Gamma_t(T),$$

and therefore

$$df_t(T) = \alpha_t(T) dt + \sigma_t(T) \cdot dW_t = \sigma_t(T) \cdot \Gamma_t(T) dt + \sigma_t(T) \cdot dB_t$$

We finally derive the risk neutral dynamics of the instantaneous interest rate under the HJM drift restriction (6.7). Recall that :

$$r_T = f_T(T) = f_0(T) + \int_0^T \alpha_u(T) du + \int_0^T \sigma_u(T) \cdot dW_u$$

Then :

$$\begin{aligned} dr_T &= \frac{\partial}{\partial T} f_0(T) dT + \alpha_T(T) dT + \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \alpha_u(T) du dT \\ &\quad + \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \sigma_u(T) \cdot dW_u dT + \sigma_T(T) \cdot dW_T. \end{aligned}$$

Organizing the terms, we get :

$$dr_t = \beta_t dt + \sigma_t(t) dW_t$$

where

$$\beta_t = \frac{\partial}{\partial t} f_0(t) + \alpha_t(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \alpha_u(t) du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sigma_u(t) \cdot dW_u$$

or, in terms of the  $\mathbb{Q}$ -Brownian motion :

$$dr_t = \beta_t^0 dt + \sigma_t(t) dB_t$$

where

$$\begin{aligned} \beta_t^0 &= \frac{\partial}{\partial t} f_0(t) + \sigma_t(t) \Gamma_t(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_u(t) \cdot \Gamma_u(t)) du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sigma_u(t) \cdot dB_u \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f_0(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_u(t) \cdot \Gamma_u(t)) du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sigma_u(t) \cdot dB_u. \end{aligned}$$

### 6.3.3 The Ho-Lee model

The Ho and Lee model corresponds to the one factor case ( $n = 1$ ) with a constant volatility of the forward rate :

$$df_t(T) = \alpha_t(T)dt + \sigma dW_t = \sigma^2(T-t)dt + \sigma dB_t$$

The dynamics of the zero-coupon bond price is given by :

$$\frac{dP_t(T)}{P_t(T)} = r_t dt - \sigma(T-t)dB_t \text{ with } r_t = f_0(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma B_t$$

By the dynamics of the forward rates, we see that the only possible movements in the yield curve are parallel shifts, i.e. all rates along the yield curve fluctuate in the same way.

### 6.3.4 The Hull-White model

The Hull and White model corresponds to one-factor case ( $n = 1$ ) with the following dynamics of the forward rates

$$df_t(T) = \sigma^2 e^{-\lambda(T-t)} \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} dt + \sigma e^{-\lambda(T-t)} dB_t$$

The dynamics of the zero-coupon bond price is given by :

$$\frac{dP_t(T)}{P_t(T)} = r_t dt - \frac{\sigma}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t)}) dB_t$$

with

$$r_t = a(t) + \int_0^t \sigma e^{-\lambda(t-u)} dB_u,$$

and

$$a(t) := f_0(t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (e^{-2\lambda t} + 1 - 2e^{-\lambda t}).$$

This implies that the dynamics of the short rate are :

$$dr_t = \lambda(m(t) - r_t) dt + \sigma dB_t \text{ where } \lambda m(t) = \lambda a(t) + a'(t)$$

## 6.4 The forward neutral measure

Let  $T_0 > 0$  be a fixed maturity. The  $T_0$ -forward neutral measure  $\mathbb{Q}^{T_0}$  is defined by the density with respect to the risk neutral measure  $\mathbb{Q}$

$$\frac{d\mathbb{Q}^{T_0}}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^{T_0} r_t dt}}{P_0(T_0)},$$

and will be shown in the next section to be a powerful tool for the calculation of prices of derivative securities in a stochastic interest rates framework.

**Proposition 6.** *Let  $M = \{M_t, 0 \leq t \leq T_0\}$  be an  $\mathbb{F}$ -adapted process, and assume that  $\tilde{M}$ , is a  $\mathbb{Q}$ -martingale, where we recall that*

$$\tilde{M}_t = e^{-\int_0^t r_s ds} M_t, \quad t \geq 0.$$

Then the process

$$\phi_t := \frac{M_t}{P_t(T_0)}, \quad 0 \leq t \leq T_0,$$

is a martingale under the  $T_0$ -forward neutral measure  $\mathbb{Q}^{T_0}$ .

*Démonstration.* We first verify that  $\phi$  is  $\mathbb{Q}^{T_0}$ -integrable. Indeed :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}} [|\phi_t|] &= P_0(T_0)^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^{T_0} r_u du} \frac{|M_t|}{P_t(T_0)} \right] \\ &= P_0(T_0)^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^t r_u du} |M_t| \right] = P_0(T_0)^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [|\tilde{M}_t|] < \infty, \end{aligned}$$

where the second equality follows from the tower property of conditional expectations. We next compute for  $0 \leq s < t$  that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}} [\phi_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^{T_0} r_u du} \frac{M_t}{P_t(T_0)} \middle| \mathcal{F}_s \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^{T_0} r_u du} \middle| \mathcal{F}_s \right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_s^{T_0} r_u du} \frac{M_t}{P_t(T_0)} \middle| \mathcal{F}_s \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_s^{T_0} r_u du} \middle| \mathcal{F}_s \right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_s^t r_u du} M_t \middle| \mathcal{F}_s \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_s^{T_0} r_u du} \middle| \mathcal{F}_s \right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\tilde{M}_t | \mathcal{F}_s]}{P_s(T_0)} = \phi_s, \end{aligned}$$

where we used the Bayes rule for the first equality and the tower property of conditional expectation in the third equality.  $\square$

The above result has an important financial interpretation. Let  $S$  be the price process of a tradable security. Then, the no-arbitrage condition ensure that  $\tilde{S}$  is a martingale under some risk neutral measure  $\mathbb{Q}$ . By definition  $\phi$  is the price process of the  $T_0$ -forward contract on the security  $S$ . Hence Proposition 6 states that

*The price process of the  $T_0$ -forward contract on a tradable security is a martingale under the  $T_0$ -forward measure  $\mathbb{Q}^{T_0}$ .*

We continue our discussion of the  $T_0$ -forward measure in the context of the Gaussian Heath-Jarrow-Morton model for the zero-coupon bond prices :

$$\frac{dP_t(T)}{P_t(T)} = r_t dt - \Lambda(T-t)\sigma dB_t \text{ where } \Lambda(u) = \frac{1 - e^{-\lambda u}}{\lambda},$$

which corresponds to the solution

$$P_t(T) = P_0(T)e^{\int_0^t (r_u - \frac{1}{2}\sigma^2\Lambda(T-u)^2)du - \int_0^t \sigma\Lambda(T-u)dB_u} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.8)$$

Recall that this model corresponds also to the Hull-White extension of the Vasicek model, up to the calibration to the spot yield curve. Since  $P_T(T) = 1$ , it follows from (6.8) that

$$\frac{d\mathbb{Q}^{T_0}}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^T r_u du}}{P_0(T)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\Lambda(T-u)^2 du - \int_0^t \sigma\Lambda(T-u)dB_u\right),$$

and by the Cameron-Martin formula, we deduce that the process

$$W_t^{T_0} := B_t + \int_0^t \sigma\Lambda(T-u)du, \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad (6.9)$$

is a Brownian motion under the  $T_0$ -forward neutral measure  $\mathbb{Q}^{T_0}$ .

## 6.5 Derivatives pricing under stochastic interest rates

### 6.5.1 European options on zero-coupon bonds

The objective of this section is to derive a closed formula for the price of a European call option on a zero-coupon bond defined by the payoff at time  $T_0 > 0$  :

$$G := (P_{T_0}(T) - K)^+ \text{ for some } T \geq T_0$$

in the context of the above Gaussian Heath-Jarrow-Morton model.

We first show how the use of the forward measure leads to a substantial reduction of the problem. By definition of the  $T_0$ -forward neutral measure, the no-arbitrage price at time zero of the European call option defined by the above payoff is given by

$$p_0(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^{T_0} r_t dt} (P_{T_0}(T) - K)^+ \right] = P_0(T_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}} \left[ (P_{T_0}(T) - K)^+ \right].$$

Notice that, while first expectation requires the knowledge of the joint distribution of the pair  $(e^{-\int_0^{T_0} r_t dt}, P_{T_0}(T))$  under  $\mathbb{Q}$ , the second expectation only requires the distribution of  $P_{T_0}(T)$  under

$\mathbb{Q}^{T_0}$ . In view of Proposition 6, an additional simplification can be achieved by passing to the price of the  $T_0$ -forward contract on the zero-coupon bond with maturity  $T$  :

$$\phi_t = \frac{P_t(T)}{P_t(T_0)}, 0 \leq t \leq T_0.$$

Since  $P_{T_0}(T_0) = 1$ , it follows that  $\phi_{T_0} = P_{T_0}(T)$ , and therefore :

$$p_0(G) = P_0(T_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}} \left[ (\phi_{T_0} - K)^+ \right].$$

Since the process  $\phi$  is a  $\mathbb{Q}^{T_0}$ -martingale by Proposition 6, we only need to compute the volatility of this process. An immediate calculation by means of Itô's formula shows that

$$\frac{d\phi_t}{\phi_t} = \sigma (\Lambda(T-t) - \Lambda(T_0-t)) dW_t^{T_0}.$$

By analogy with the previously derived Black-Scholes formula with deterministic coefficients (5.7), this provides :

$$\begin{aligned} p_0(G) &= P_0(T_0) \left[ \phi_0 N \left( \frac{\log \frac{\phi_0}{K} + \frac{1}{2} v(T_0)}{\sqrt{v(T_0)}} \right) - K N \left( \frac{\log \frac{\phi_0}{K} - \frac{1}{2} v(T_0)}{\sqrt{v(T_0)}} \right) \right] \\ &= P_0(T) N \left( \frac{\log \frac{P_0(T)}{K} + \frac{1}{2} v(T_0)}{\sqrt{v(T_0)}} \right) - \tilde{K} N \left( \frac{\log \frac{P_0(T)}{K} - \frac{1}{2} v(T_0)}{\sqrt{v(T_0)}} \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

where

$$\tilde{K} := K P_0(T_0) \quad \text{and} \quad v(T_0) := \sigma^2 \int_0^T (\Lambda(T-t) - \Lambda(T_0-t))^2 dt. \quad (6.11)$$

### 6.5.2 The Black-Scholes formula under stochastic interest rates

In this section, we provide an extension of the Black-Scholes formula for the price of a European call option defined by the payoff at some maturity  $T > 0$  :

$$G := (S_T - K)^+ \text{ for some exercise price } K > 0,$$

to the context of a stochastic interest rate. Namely, the underlying asset price process is defined by

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t (r_u - \frac{1}{2} |\Sigma(u)|^2) du + \int_0^t \Sigma(u) \cdot dB_u}, t \geq 0,$$

where  $B$  is a Brownian motion in  $\mathbb{R}^2$  under the risk neutral measure  $\mathbb{Q}$ , and  $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a deterministic  $C^1$  function. The interest rates process is defined by the Heath-Jarrow-Morton model for the prices of zero-coupon bonds :

$$P_t(T) = P_0(T) e^{\int_0^t (r_u - \frac{1}{2} \sigma^2 \Lambda(T-u)^2) du - \int_0^t \sigma \Lambda(T-u) dW_u^{01}},$$

where

$$\Lambda(t) := \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda},$$

for some parameters  $\sigma, \lambda > 0$ . This models allows for a possible correlation between the dynamics of the underlying asset and the zero-coupon bonds.

Using the concept of forward measure, we re-write the no-arbitrage price of the European call option in :

$$\begin{aligned} p_0(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T r_t dt} (S_T - K)^+ \right] \\ &= P_0(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[ (S_T - K)^+ \right] = P_0(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[ (\phi_T - K)^+ \right], \end{aligned}$$

where  $\phi_t := P_t(T)^{-1} S_t$  is the price of the  $T$ -forward contract on the security  $S$ . By Proposition 6, the process  $\{\phi_t, t \geq 0\}$  is a  $\mathbb{Q}^T$ -martingale measure, so its dynamics has zero drift when expressed in terms of the  $\mathbb{Q}^T$ -Brownian motion  $W^T$ . We then calculate the volatility component in its dynamics by means of Itô's formula, and we obtain :

$$\frac{d\phi_t}{\phi_t} = (\Sigma_1(t) + \sigma\Lambda(T-t)) dW^{T^1} + \Sigma_2(t) dW^{T^2}.$$

Hence, under the  $T$ -forward neutral measure  $\mathbb{Q}^T$ , the process  $\phi$  follows a time-dependent Black-Scholes model with zero interest rate and time dependent squared volatility  $(\Sigma_1(t) + \sigma\Lambda(T-t))^2 + \Sigma_2(t)^2$ . We can now take advantage of the calculation performed previously in (5.7), and conclude that

$$\begin{aligned} p_0(G) &= P_0(T) \left[ \phi_0 N \left( \frac{\log \frac{\phi_0}{K} + \frac{1}{2}v(T)}{\sqrt{v(T)}} \right) - K N \left( \frac{\log \frac{\phi_0}{K} - \frac{1}{2}v(T)}{\sqrt{v(T)}} \right) \right] \\ &= S_0 N \left( \frac{\log \frac{S_0}{K} + \frac{1}{2}v(T)}{\sqrt{v(T)}} \right) - \tilde{K} N \left( \frac{\log \frac{S_0}{K} - \frac{1}{2}v(T)}{\sqrt{v(T)}} \right), \end{aligned}$$

where

$$\tilde{K} := KP_0(T) \text{ and } v(T) := \int_0^T \left( (\Sigma_1(t) + \sigma\Lambda(T-t))^2 + \Sigma_2(t)^2 \right) dt.$$

## 6.6 Interest rate markets and derivatives

### 6.6.1 Libor rates

The vast majority of derivative products in the interest rate markets are written on a specific interest rate index called Libor rate (or London InterBank Offered Rate). The Libor rate is computed and published daily by Intercontinental Exchange for 5 major currencies (USD, EUR, GBP, JPY and CHF) and 7 maturities (1 day, 1 week, 1 month, 2 months, 3 months, 6 months and 12 months). Although the Euro is one of the currencies for which Libor is quoted, but the Euribor computed by the European Banking Federation is more often used.

The different LIBOR rates are computed as the average (simply compounded) rate to borrow money over a panel of banks including between 7 and 18 contributors, where the lowest 25% and the highest 25% of the contributions are excluded. The rates are based not on actual transactions but on estimates by the panel banks. More precisely, the banks are asked to answer the question :

At what rate could you borrow funds, were you to do so by asking for and then accepting inter-bank offers in a reasonable market size just prior to 11 am?

We shall denote the Libor rate fixed at  $T$  for the period between  $T$  and  $T + \delta$  by  $L_T(T, T + \delta)$ . By definition of simple compounding, the Libor rate is related to the zero-coupon bond price via the formula

$$P_T(T + \delta) = \frac{1}{1 + \delta L_T(T, T + \delta)}.$$

The most basic derivative product in the Libor market is the *forward rate agreement* (FRA), which allows to exchange, at date  $T + \delta$ , the variable cash flow  $\delta L_T(T + \delta)$  against a fixed cash flow  $\delta K$ , where  $K$  is a constant. The FRA rate or the *forward Libor* rate at time  $t$  is the value of  $K$  such that the FRA has zero price at time  $t$ . In other words it is the (simply compounded) interest rate fixed at time  $t$  for borrowing funds at the Libor rate between  $T$  and  $T + \delta$ . This forward Libor rate will be denoted by  $L_t(T, T + \delta)$ . By standard no-arbitrage arguments, we conclude that the forward Libor rate may be computed from the prices of zero-coupon bonds with maturities  $T$  and  $T + \delta$ .

$$\frac{P_t(T + \delta)}{P_t(T)} = \frac{1}{1 + \delta L_t(T, T + \delta)}. \quad (6.12)$$

Often, the payments of a derivative product are defined with the help of a *tenor structure*, that is, a set of maturity dates on which various fixing, payments etc. take place. Let  $T_0 > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $T_i = T_0 + i\delta$ ,  $i = 1 \dots, n$ , and denote by  $\mathbf{T} := \{T_0 < T_1 < \dots < T_n\}$  the set of such defined maturities. Typically, the payments take place at dates  $T_1, \dots, T_n$ , and the payment at date  $T_i$  is determined by the Libor rate fixed at date  $T_{i-1}$ . When a tenor structure has been defined, we shall denote the forward Libor rate corresponding to the period  $[T_{i-1}, T_i]$  simply by  $L_i^i$ .

**Libor : recent developments** The Libor rates do not correspond to actual transactions, but to estimation of the funding costs for a “reasonable” loan size. The banks whose funding costs are high may be inclined to report lower values, so as not to appear “dangerous”. In 2012, large scale Libor manipulations were discovered by the regulators, and several banks such as UBS, RBS and Barclays, had to pay considerable fines.

A Libor reform was implemented in 2014. As part of this reform, the regulatory oversight was strengthened, the number of rates was reduced to 35 (5 currencies x 7 maturities, down from 10 currencies x 15 maturities before the reform) and the task of computing the Libor was transferred to the Intercontinental Exchange (from the British Bankers Association).

### 6.6.2 Interest rates swaps

The interest rate swap is a derivative product allowing to exchange a stream of fixed cash flows (the fixed leg) against a stream of cash flows determined by the realization of the Libor rate (the floating leg). More precisely,

- *the floating leg* : consists of the payments  $\delta L_{T_{j-1}}^j$  at each tenor date  $T_j$  for  $j = 1, \dots, n$ . The price of the floating leg at date  $t \leq T_0$  is thus given by

$$\sum_{j=1}^n \delta L_t^j P_t(T_j) = P_t(T_0) - P_t(T_n);$$

— *the fixed leg* : consists of the payments  $\delta\kappa$  at each tenor date  $T_j$  for  $j = 1, \dots, n$ . The price of the fixed leg at date  $t \leq T_0$  is thus given by

$$\sum_{j=1}^n \delta\kappa P_t(T_j).$$

The *interest rate swap rate* corresponding to the tenor structure  $\mathbf{T}$  is defined as the constant rate which equates the value at time  $t \leq T_0$  of the above floating and fixed leg. Direct calculation leads to the following expression of the swap rate :

$$S_t(T_0, \delta, n) = \frac{P_t(T_0) - P_t(T_n)}{\delta \sum_{j=1}^n P_t(T_j)} = \frac{\sum_{j=1}^n P_t(T_j) L_t^j}{\sum_{j=1}^n P_t(T_j)},$$

in other words, the swap rate is a weighted average of the forward Libor rates corresponding to the payment dates of the swap.

### 6.6.3 Caps and floors

The counterparties of an interest rate swap are exposed to the risk of fluctuations of the Libor rates. Interest rate caps and floors are options which allow their holders to partially offset this risk. An *interest rate cap* with tenor structure  $\mathbf{T}$  and strike  $K$  pays to its holder the amount

$$\delta(L_{T_{j-1}}^j - K)^+$$

at each tenor date  $T_j$  for  $j = 1, \dots, n$ . Similarly, an *interest rate floor* pays the amount

$$\delta(K - L_{T_{j-1}}^j)^+$$

at each tenor date  $T_j$  for  $j = 1, \dots, n$ . A cap may be decomposed into a series of *caplets*, where each caplet is a call option on the Libor rate, paying to its holder the amount

$$\delta(L_T(T, T + \delta) - K)^+$$

at date  $T + \delta$ . Similarly, a floor is decomposed into a series of *floorlets*.

**Market formula for caplets** To compute the price of a caplet with expiry date  $T + \delta$ , it is convenient to place ourselves under the  $T + \delta$ -forward neutral measure  $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ . Instead of constructing this measure from the risk-neutral probability as we did in Proposition 6, it is convenient here to assume its existence directly. We start with a filtered probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  and assume that the zero-coupon price processes  $P_t(T)$  and  $P_t(T + \delta)$  are continuous strictly positive Itô processes.

**Proposition 7.** *Assume that there exists a probability  $\mathbb{Q}^{T+\delta}$  equivalent to  $\mathbb{P}$  such that the Libor rate*

$$L_t(T, T + \delta) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{P_t(T)}{P_t(T + \delta)} - 1 \right).$$

*is a martingale under  $\mathbb{Q}^{T+\delta}$  with dynamics*

$$\frac{dL_t(T, T + \delta)}{L_t(T, T + \delta)} = \sigma_t dW_t,$$



where  $W$  is a standard Brownian motion under  $\mathbb{Q}^{T+\delta}$  and  $(\sigma_t)$  is a strictly positive deterministic volatility function satisfying  $\int_0^T \sigma_s^2 ds < \infty$ .

Then the unique arbitrage-free price of a caplet with pay-off  $\delta(L_T(T, T + \delta) - K)^+$  at date  $T + \delta$  is given by

$$\begin{aligned} \text{Cplt}_t(T, T + \delta, K) &= \delta P_t(T + \delta) L_t(T, T + \delta) N(d_1) - \delta P_t(T + \delta) K N(d_2) \\ d_{1,2} &= \frac{\log \frac{L_t(T, T + \delta)}{K} \pm \frac{1}{2} V(t, T)}{\sqrt{V(t, T)}}, \quad V(t, T) = \int_t^T \sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Let  $\mathbb{F}$  be the filtration of the Brownian motion  $W$  completed with the null sets and consider a pay-off  $H_T$  with  $\frac{H_T}{P_T(T + \delta)} \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ . By the martingale representation theorem, there exists a unique process  $\phi \in \mathbb{H}^2$  with

$$\frac{H_T}{P_T(T + \delta)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} \left[ \frac{H_T}{P_T(T + \delta)} \right] + \int_0^T \phi_t dW_t.$$

Now, for  $t \in [0, T]$ , let

$$\delta_t = \frac{\phi_t}{\delta \sigma_t L_t(T, T + \delta)}$$

and consider a self-financing portfolio invested into zero-coupon bonds with maturities  $T$  and  $T + \delta$ , with initial value

$$V_0 = P_0(T + \delta) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} \left[ \frac{H_T}{P_T(T + \delta)} \right],$$

and such that the quantity of zero-coupon bonds with maturity  $T$  is given by  $\delta_t$ . The value of this portfolio at time  $T$  writes

$$V_T = V_0 + \int_0^T \delta_t dP_t(T) + \int_0^T (V_t - \delta_t P_t(T)) dP_t(T + \delta).$$

By Itô's formula we can then write

$$\begin{aligned} \frac{V_T}{P_T(T + \delta)} &= \frac{V_0}{P_0(T + \delta)} + \int_0^T \delta_t d \frac{P_t(T)}{P_t(T + \delta)} \\ &= \frac{V_0}{P_0(T + \delta)} + \delta \int_0^T \delta_t dL_t \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} \left[ \frac{H_T}{P_T(T + \delta)} \right] + \int_0^T \phi_t dW_t = \frac{H_T}{P_T(T + \delta)}. \end{aligned}$$

Therefore,  $V$  is the replicating portfolio for the contingent claim  $H_T$  and so the no arbitrage price of this claim at  $t = 0$  is given by  $V_0$ .

The caplet has pay-off at time  $T + \delta$  given by  $\delta(L_T(T + \delta) - K)^+$ . However, since this random variable is  $\mathcal{F}_T$ -measurable, its value at time  $T$  is given by  $\delta P_T(T + \delta)(L_T(T + \delta) - K)^+$ . Taking  $H_T = \delta P_T(T + \delta)(L_T(T + \delta) - K)^+$  in the above argument, we see that the price of the caplet at time  $t \leq T$  is given by

$$\delta P_t(T + \delta) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} \left[ (L_T(T + \delta) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Since  $(L_t(T, T + \delta))_{t \geq 0}$  is a lognormal martingale under  $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ , the Black-Scholes formula allows to conclude.  $\square$

**Exercice 3.** Describe the hedging strategy for the caplet obtained as a by-product of the above proof.

This formula is used in particular for computing implied volatilities of caplets in interest rate markets : the implied volatility is defined as the unique value  $\sigma_{imp}$  such that the above formula gives the observed market price of the caplet with  $V_t(T) = \sigma_{imp}^2(T-t)$ .

### 6.6.4 Swaptions

The swaption with tenor structure  $\mathbf{T}$ , maturity  $T$  and strike  $K$  and is an option which gives to its holder the right, at date  $T$ , to enter an interest rate swap with tenor structure  $\mathbf{T}$  and fixed rate  $K$ . One distinguishes payer swaptions (the ones where the investor will pay the floating rate if she decides to enter the swap) and receiver swaptions. For European swaptions, which are the focus of this section, the exercise is possible at a single maturity date, which typically coincides with the starting date  $T_0$  of the swap. Bermudan swaptions, by contrast, allow exercise at multiple dates.

To fix the ideas, let us consider the case of a receiver swaption. Its pay-off at maturity date  $T$  is given by

$$\left( \delta \sum_{j=1}^n P_T(T_j)(L_T^j - K) \right)^+.$$

**Market formula for swaptions** To compute the price of a swaption, it is convenient to introduce the “annuity” numeraire

$$A_t = \sum_{j=1}^n \delta P_t(T_j)$$

and the associated martingale measure  $\mathbb{Q}^A$  defined via

$$\frac{d\mathbb{Q}^A}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{A_T}{A_0} e^{-\int_0^T r_s ds}.$$

Then, the swaption price at time  $t$  writes

$$\begin{aligned} \text{Swtn}_t(T, T_0, \delta, n, K) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \left( \delta \sum_{j=1}^n P_T(T_j)(L_T^j - K) \right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right] \\ &= A_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^A} \left[ \frac{1}{A_T} \left( \delta \sum_{j=1}^n P_T(T_j)(L_T^j - K) \right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right] \\ &= A_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^A} \left[ (S_T(T_0, \delta, n) - K)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

One can thus view a swaption as a call option on the swap rate. By definition, the swap rate  $(S_t)$  is a martingale under the measure  $\mathbb{Q}^A$  since it can be seen as a portfolio of assets normalized by  $A_t$ .

The market formula or Black’s formula for swaptions assumes can be obtained in a similar way to the one for the caplets.

**Proposition 8.** Assume that there exists a probability measure  $\mathbb{Q}^A$  equivalent to  $\mathbb{P}$  such that the swap rate  $(S_t(T_0, \delta, n))_{t \geq 0}$  is a martingale under  $\mathbb{Q}^A$  with dynamics

$$\frac{dS_t(T_0, \delta, n)}{S_t(T_0, \delta, n)} = \sigma_t dW_t$$

where  $W$  is a standard Brownian motion under  $\mathbb{Q}^A$  and  $(\sigma_t)$  is a strictly positive deterministic volatility function satisfying  $\int_0^T \sigma_s^2 ds < \infty$ .

Then the unique arbitrage-free price of a receiver swaption at date  $T$  is given by

$$\begin{aligned} Swtn_t(T, T_0, \delta, n, K) &= A_t S_t(T_0, \delta, n) N(d_1) - A_t K N(d_2) \\ d_{1,2} &= \frac{\log \frac{S_t(T_0, \delta, n)}{K} \pm \frac{1}{2} V(t, T)}{\sqrt{V(t, T)}}, \quad V(t, T) = \int_t^T \sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

Note that since the assumption of deterministic volatility for the swap rate is not compatible with the assumption of deterministic volatility for the Libor rate, the market formula for swaptions is not compatible with the market formula for caplets.

**Exercise 4.** Prove the market formula for swaptions.

## 6.7 Libor market model for interest rates

The Libor market model (LMM), also known as BGM model in reference to the article by A. Brance, D. Gatarek and M. Musiela Brace et al. [1997], describes the joint arbitrage-free dynamics of the Libor rates corresponding to a given tenor structure, which is compatible with the market formula for the prices of caplets written on each individual Libor. Other important initial references on this model include Musiela and Rutkowski [1997], Jamshidian [1997], Miltersen et al. [1997].

To introduce the Libor market model, we fix a tenor structure  $\mathbf{T} = \{T_0 < T_1 < \dots < T_n\}$  and assume that the zero-coupon bonds with maturities  $T_0, \dots, T_n$  are continuously traded in the market, and that their prices are continuous Itô processes under the historical probability  $\mathbb{P}$ . The joint dynamics of the Libor rates must be specified under a reference probability measure. In this book, as this is usually done in the literature, we choose as reference measure the forward measure corresponding to the terminal date  $T_n$ . We make the following assumptions.

(LMM1) There exists a probability measure  $\mathbb{Q}^n$  equivalent to  $\mathbb{P}$  such that the forward zero-coupon price processes

$$\left( \frac{P_t(T_i)}{P_t(T_n)} \right)_{0 \leq t \leq T_i}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

are  $\mathbb{Q}^n$ -martingales.

(LMM2) Under the measure  $\mathbb{Q}^n$ , the Libor rates  $L_t^1, \dots, L_t^n$  have the following dynamics

$$\frac{dL_t^i}{L_t^i} = \mu_t^i dt + \gamma^i(t)^T dW_t^n, \quad 0 \leq t \leq T_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

where  $W^n$  is a  $d$ -dimensional standard Brownian motion under  $\mathbb{Q}^n$ , with  $d \leq n$ ;  $\mu^i$  is a real-valued measurable adapted process satisfying  $\int_0^{T_{i-1}} |\mu_s^i| ds < \infty$  a.s., and  $\gamma^i$  is a  $\mathbb{R}^d$ -valued

deterministic function (vector) satisfying  $\int_0^{T_{i-1}} |\gamma^i(t)|^2 dt < \infty$ . Moreover we assume that  $|\gamma^i(t)|$  is strictly positive for  $0 \leq t \leq T_{i-1}$  and the  $n \times d$  matrix  $\gamma(t)\gamma(t)^T$  is invertible for all  $0 \leq t \leq T_{i-1}$ .

Furthermore, we let  $\mathbb{F}$  denote the filtration of  $W^n$  completed with the null sets.

The Libor market model is introduced through the following theorem.

**Théorème 14.** *Let Assumptions (LMM1) and (LMM2) hold true. Then, the following holds.*

*i. The drift processes satisfy*

$$\mu_t^i = -\delta \sum_{j=i+1}^n \frac{\gamma^i(t)^T \gamma^j(t) L_t^j}{1 + \delta L_t^j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

*ii. Fix an index  $i$  with  $1 \leq i \leq n$  and introduce the measure  $\mathbb{Q}^i$  via*

$$\frac{d\mathbb{Q}^i}{d\mathbb{Q}^n} \Big|_{\mathcal{F}_{T_i}} = \frac{P_0(T_n)}{P_0(T_i)} \prod_{j=i+1}^n (1 + \delta L_{T_i}^j).$$

*The Libor rate  $(L_t^i)_{0 \leq t \leq T_{i-1}}$  is a martingale under  $\mathbb{Q}^i$  with dynamics*

$$\frac{dL_t^i}{L_t^i} = \gamma^i(t)^T dW_t^i,$$

*where  $W^i$  is a  $d$ -dimensional standard Brownian motion under  $\mathbb{Q}^i$ .*

*Démonstration. Part i.* We define

$$M_t^k := \frac{P_t(T_k)}{P_t(T_n)} = \prod_{i=k+1}^n (1 + \delta L_t^i), \quad 0 \leq k \leq n.$$

By assumption (LMM1), for  $0 < k \leq n$ ,  $M^{k-1}$  is a  $\mathbb{Q}^n$ -martingale. Applying the Itô formula to  $M_t^{k-1} = M_t^k (1 + \delta L_t^k)$  yields

$$\begin{aligned} dM_t^{k-1} &= (1 + \delta L_t^k) dM_t^k + \delta M_t^k L_t^k \mu_t^k dt + \delta M_t^k L_t^k \gamma^k(t) dW_t^n + \delta d\langle M^k, L^k \rangle_t \\ &= \delta M_t^k L_t^k \mu_t^k dt + \delta^2 \sum_{i=k+1}^n \frac{M_t^k}{1 + \delta L_t^i} L_t^k L_t^i \gamma^k(t)^T \gamma^i(t) dt + \text{loc. mart.} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\mu_t^k = -\delta \sum_{i=k+1}^n \frac{L_t^i \gamma^k(t)^T \gamma^i(t)}{1 + \delta L_t^i}.$$

*Part ii.* First, observe that the measure  $\mathbb{Q}^i$  is well defined for  $i = 1, \dots, n$  in view of Assumption (LMM1). To prove part ii. of the theorem, we will show that for  $k = 1, \dots, n$ , the process  $W^k$  defined by

$$W_t^k = W_t^n - \sum_{j=k+1}^n \int_0^t \frac{\delta L_s^j}{1 + \delta L_s^j} \gamma^j(s) ds$$

is a standard  $d$ -dimensional Brownian motion under  $\mathbb{Q}^k$ . This statement will be shown by induction. For  $k = n$ , there is nothing to prove. Suppose then that the statement holds true for some  $k \leq n$ . We will show that it holds for  $k - 1$  as well.

We have

$$\frac{d\mathbb{Q}^{k-1}}{d\mathbb{Q}^k} \Big|_{\mathcal{F}_{T_{k-1}}} = \frac{P_0(T_k)}{P_0(T_{k-1})} (1 + \delta L_{T_{k-1}}^k) = Z_{T_{k-1}},$$

with

$$Z_t := \frac{P_0(T_k)}{P_0(T_{k-1})} (1 + \delta L_t^k).$$

Since, by induction hypothesis,

$$\frac{dL_t^k}{L_t^k} = \gamma^k(t)^T dW_t^k,$$

where  $W^k$  is a standard Brownian motion under  $\mathbb{Q}^k$ , applying Itô's formula we get

$$Z_T = 1 + \int_0^T \frac{P_0(T_k)}{P_0(T_{k-1})} \delta L_t^k \gamma^k(t)^T dW_t^k = 1 + \int_0^T Z_t \frac{\delta L_t^k}{1 + \delta L_t^k} \gamma^k(t)^T dW_t^k.$$

Then, by Girsanov's theorem, the process  $W^{k-1}$  defined by

$$W_t^{k-1} := W_t^k - \int_0^t \frac{\delta L_s^k}{1 + \delta L_s^k} \gamma^k(s) ds$$

is a Brownian motion under  $\mathbb{Q}^{k-1}$ . □

The following results shows how contingent claims are priced in the Libor market model.

**Théorème 15.** *Let Assumptions (LMM1) and (LMM2) hold true. Then, the following holds*

- i. *Fix an index  $k$  with  $1 \leq k \leq n$ . The unique arbitrage-free price of a caplet with pay-off  $\delta(L_{T_{k-1}-K}^k)^+$  at date  $T_k$  is given by Proposition 7 with  $T = T_{k-1}$  and  $\sigma_t = |\gamma^k(t)|$ .*
- ii. *Let  $T \leq T_0$  and consider a contingent claim with pay-off  $H_T$  at date  $T$  such that  $\frac{H_T}{P_T(T_n)} \in L^2(\mathbb{F}, \mathbb{Q}^n)$ . The unique arbitrage-free price of this contingent claim is given by*

$$V_t = P_t(T_n) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n} [H_T | \mathcal{F}_t].$$

*Démonstration.* The first part is a direct corollary of Theorem 14, so only the second part needs to be shown. By the martingale representation theorem, there exists a unique ( $\mathbb{R}^d$ -valued) process  $\phi \in \mathbb{H}^2$

$$\frac{H_T}{P_T(T_n)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n} \left[ \frac{H_T}{P_T(T_n)} \right] + \int_0^T \phi_t^T dW_t$$

For  $t \in [0, T]$ , let

$$\delta_t = \frac{1}{\delta} D^{-1} \gamma(t)^T (\gamma(t) \gamma(t)^T)^{-1} \phi_t,$$

where  $D$  is an  $n \times n$  matrix with elements

$$D_{ik} = \frac{P_t(T_{i-1})}{P_t(T_n)} \frac{\delta L_t^k}{1 + \delta L_t^k} \mathbf{1}_{k \geq i}.$$

Note that the matrix  $D$  is invertible since it is triangular and the diagonal elements are non-zero. Consider a self-financing portfolio invested into zero-coupon bonds with maturities  $T_0, T_1, \dots, T_n$  such that the quantity of zero-coupons with maturity  $T_i$  is given by  $\delta^{i+1}$  for  $i = 1, \dots, n$ , with initial value

$$V_0 = P_0(T_n) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n} \left[ \frac{H_T}{P_T(T_n)} \right]$$

The value of this portfolio at time  $T$  is

$$V_T = V_0 + \int_0^T \sum_{i=1}^n \delta_t^i dP_t(T_{i-1}) + \int_0^T \left( V_t - \sum_{i=1}^n \delta_t^i P_t(T_{i-1}) \right) dP_t(T_n).$$

By Itô's formula,

$$\begin{aligned} \frac{V_T}{P_T(T_n)} &= \frac{V_0}{P_0(T_n)} + \int_0^T \sum_{i=1}^n \delta_t^i d \frac{P_t(T_{i-1})}{P_t(T_n)} \\ &= \frac{V_0}{P_0(T+\delta)} + \delta \int_0^T \sum_{i=1}^n \delta_t^i \frac{P_t(T_{i-1})}{P_t(T_n)} \sum_{k=i}^n \frac{\delta L_t^k}{1 + \delta L_t^k} \gamma^k(t)^T dW_t^n \\ &= \frac{V_0}{P_0(T+\delta)} + \delta \int_0^T \delta_t^T D \gamma(t)^T dW_t^n \\ &= \frac{V_0}{P_0(T+\delta)} + \int_0^T \phi_t^T dW_t^n = \frac{H_T}{P_T(T_n)}. \end{aligned}$$

Therefore,  $V$  is the replicating portfolio for the contingent claim  $H_T$  and the no arbitrage price of this claim at time  $t$  is given by  $V_t$ .  $\square$

*Exemple 8* (Pricing swaptions in the Libor market model). Consider a receiver swaption with maturity  $T_0$ , written on a swap with payment dates  $T_1, \dots, T_n$ . The pay-off of the swaption equals

$$\left( \delta \sum_{j=1}^n P_{T_0}(T_j) (L_{T_0}^j - K) \right)^+ = \left( \delta \sum_{j=1}^n (L_{T_0}^j - K) \prod_{i=1}^j (1 + \delta L_{T_0}^i) \right)^+.$$

Therefore, the price of this swaption at time  $t$  is given by

$$\text{Swtn}_t(T_0, T_0, \delta, n, K) = P_t(T_n) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n} \left[ \left( \delta \sum_{j=1}^n (L_{T_0}^j - K) \prod_{i=1}^j (1 + \delta L_{T_0}^i) \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

To compute this price by Monte Carlo, it is therefore sufficient to simulate the  $n$  Libor rates up to date  $T_0$ . Note that there is no explicit formula for swaption prices in the Libor market model, the LMM is not compatible with the market formula for swaptions. Nevertheless, there exist efficient approximations for swaption prices, see e.g., Jackel and Rebonato [2003].

### 6.7.1 Parameterization and calibration of the Libor market model

To fully specify the Libor market model, one needs to choose the vector-valued volatility functions  $\gamma^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . More precisely, the distribution of the Libor rates is determined by the instantaneous covariance matrix

$$\Sigma_{ij}(t) = \gamma^i(t)^T \gamma^j(t), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Usually, one chooses separately the time-dependent *volatility functions*

$$\sigma_i(t) = |\gamma^i(t)|$$

and the covariance matrix

$$\rho_{ij} = \frac{\gamma^i(t)^T \gamma^j(t)}{|\gamma^i(t)| |\gamma^j(t)|},$$

which is typically assumed constant.

In the widely used Rebonato's parameterization Rebonato [2002], the instantaneous volatilities have the form

$$\sigma_i(t) = c_i g(T_i - t),$$

where the coefficients  $(c_i)_{i=1}^n$  are specific for each Libor rate, and the function  $g$ , which describes the time dependence of the volatilities, is common for all rates and has the form

$$g(s) = g_\infty + (1 - g_\infty + as)e^{-bs},$$

where  $g_\infty$ ,  $a$  and  $b$  are parameters. These parameters are usually calibrated to market quoted caplet volatilities.

The correlation matrix cannot be calibrated to caplet prices, since these prices do not depend on the correlation. This matrix may be estimated from historical data or fitted to the observed swaption prices. In the latter case, one usually uses a parametric form; for example, it can be shown that the following formula yields a valid correlation matrix with positive elements for all  $\rho_\infty \in [0, 1]$  and all  $\beta \geq 0$ .

$$\rho_{ij} = \rho_\infty + (1 - \rho_\infty)e^{-\beta|i-j|}.$$

## 6.8 Evolutions in interest rate models and markets after the subprime crisis

The interest rate markets underwent major evolutions during and after the subprime crisis of 2007–2008, both due to changes of the regulatory framework and to the changes in the market actors' perception of risk associated to various interest rates and interest rate products.

Prior to the crisis sovereign debt of developed countries and interbank loans were considered risk-free: default risk was taken into account only for corporate debt. All available instruments (sovereign bonds, swaps, Libor rates) were used to construct a single "yield curve", used both for forward projections and for discounting. Different rates for the same maturity (e.g., Libor and OIS / Eonia swap) were almost identical (see Figure 6.4, left graph). In other words, it was considered possible to borrow / lend money at the Libor rate without taking any risk: the price of a zero-coupon bond paying at the end of the period the Libor rate fixed at the beginning of the period was equal to its notional value.

This possibility of risk-free borrowing and lending meant that the Libor rates corresponding to maturities  $T_1 < T_2 < T_3$  were linked through the following formula :

$$(1 + (T_2 - T_1)L_t(T_1, T_2))(1 + (T_3 - T_2)L_t(T_2, T_3)) \quad (6.13)$$

$$= (1 + (T_3 - T_1)L_t(T_1, T_3)). \quad (6.14)$$

After the default of Lehmann Brothers, non-collateralized loans on the interbank market are no longer considered risk-free (see Figure 6.4, left graph). They are subject to “average default risk for a large bank represented in the panel of Libor contributors”. The default risk increases with maturity : a basis swap which pays Libor3M against Libor6M no longer has zero value (see Figure 6.4, right graph). Overnight loans are still considered to be essentially risk-free. The risk-free rate is therefore now computed using solely the Overnight Indexed Swap (OIS) rates.

**Overnight indexed swap** A Overnight Indexed Swap (OIS) is an exchange of a sequence of fixed cash flows against a sequence of variable cash flows, computed using the overnight rate. The standard overnight rate in Europe is the EONIA (Euro Overnight Index Average) and in the US it is the Federal Funds Rate (FF). Both are computed as average rates for non-collateralized overnight loans in the interbank market. The default risk for such a short horizon is very low, and the overnight rate is generally considered to be risk-free.

The floating rate of an OIS paid at  $T_i$  is given by

$$\bar{L}(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\delta_i} \left( \prod_{j=1}^{K_i} (1 + (t_j - t_{j-1})R(t_{j-1}, t_j)) - 1 \right),$$

where  $T_{i-1} = t_0 < t_1 < \dots < t_{K_i} = T_i$  is a subdivision of the period  $[T_{i-1}, T_i]$  onto  $K_i$  days, and  $R(t_{j-1}, t_j)$  is the overnight rate for the period  $[t_{j-1}, t_j]$ . OIS swaps are collateralized with daily adjustment of collateral, which is itself accrued at the overnight rate. The OIS rate for a given maturity is the fixed rate such that the value of the OIS swap for this maturity is zero. The risk-free yield curve can therefore be reconstructed from OIS rates with different maturities.

### 6.8.1 The Multicurve framework for pricing interest rate derivatives

The fact that Libor rates corresponding to different holding period lengths  $\delta$  are no longer linked to each other through the arbitrage relationship (6.14) has led to a major paradigm shift in the interest rate modeling. Since such different Libor rates correspond to different levels of default risk, it is no longer possible to use the instruments corresponding to different values  $\delta$  to reconstruct a single yield curve. Instead, one needs to work with several different yield curves, one for each holding period length. The zero-coupon rate curve corresponding to the OIS rates plays a special role : it is considered to be risk-free and is used to discount future cash flows. The corresponding zero-coupons are denoted simply by  $P_t(T)$ .

For each holding period length  $\delta_i$ , consider the set of tenor dates  $(T_k^i)_{k=0}^n$ ,  $T_k^i = T_0^i + k\delta_i$ . The Libor rate for the period  $[T_{k-1}^i, T_k^i]$ , observed at date  $T_{k-1}^i$ , is denoted by  $L_{T_{k-1}^i}^{i,k} := L_{T_{k-1}^i}^i(T_{k-1}^i, T_k^i)$ . We assume that for each Libor rate, there is a traded instrument (FRA), allowing to exchange the variable cash flow  $\delta_i L_{T_{k-1}^i}^{i,k}$  against a fixed cash flow  $\delta_i K$ , at date  $T_k^i$ . As before, the forward Libor



rate is the value at time  $t$  of the fixed cash flow  $K$ , which corresponds to the zero price of the FRA, and is denoted by

$$L_t^{i,k} := L_t^i(T_{k-1}^i, T_k^i).$$

However, it can no longer be expressed in terms of the risk-free zero-coupon bonds using the formula (6.12) : in the multicurve framework, the forward rate agreements become independent assets. Consequently, the price at time  $t$  of a receiver FRA equals

$$\text{FRA}_t(T_{k-1}^i, T_k^i, K) = \delta_i P_t(T_k^i) (L_t^{i,k} - K).$$

In the following paragraphs we illustrate, on several examples, how the classical arbitrage relationships and pricing formulas change under the multicurve framework.

**Pricing an interest rate swap** Consider an interest rate swap, which at each date  $T_k^i$ ,  $k = 1, \dots, n$ , pays a variable cash flow  $\delta_i L_{T_{k-1}^i}^{i,k}$  in exchange for a fixed amount  $\delta_i K$ . Such a swap is nothing but a series of forward rate agreements so that its price at time  $t$  is given by

$$\text{Swap}_t(K, T_0^i, \dots, T_n^i) = \delta_i \sum_{k=1}^n P_t(T_k^i) (L_t^{i,k} - K).$$

Note that the forward Libor rates are computed using the interest rate curve corresponding to the tenor of the swap, but the discount factors are those of the risk-free yield curve. The swap rate is therefore given by

$$S_t(T_0^i, \delta_i, n) = \frac{\sum_{k=1}^n P_t(T_k^i) L_t^{i,k}}{\sum_{k=1}^n P_t(T_k^i)}$$

Note that this formula is not equivalent to the classical swap rate formula

$$\frac{P_t(T_0^i) - P_t(T_n^i)}{\delta_i \sum_{k=1}^n P_t(T_k^i)}.$$

**A market formula for caplets** Consider a caplet which pays  $\delta_i (L_{T_{k-1}^i}^{i,k} - K)^+$  at  $T_k^i$ . The following proposition extends Proposition 7 to the multicurve framework.

**Proposition 9.** *Assume that there exists a probability  $\mathbb{Q}^{T_k^i}$  equivalent to  $\mathbb{P}$  such that the forward Libor rate  $L_t^{i,k}$  is a martingale under  $\mathbb{Q}^{T_k^i}$  with dynamics*

$$\frac{dL_t^{i,k}}{L_t^{i,k}} = \sigma_t dW_t,$$

where  $W$  is a standard Brownian motion under  $\mathbb{Q}^{T_k^i}$  and  $(\sigma_t)$  is a strictly positive deterministic volatility function satisfying  $\int_0^{T_{k-1}^i} \sigma_s^2 ds < \infty$ .

Then the unique arbitrage-free price of a caplet with pay-off  $\delta_i (L_{T_{k-1}^i}^{i,k} - K)^+$  at date  $T_k^i$  is given by

$$\begin{aligned} \text{Cplt}_t(T_{k-1}^i, T_k^i, K) &= \delta_i P_t(T_k^i) L_t^{i,k} N(d_1) - \delta_i P_t(T_k^i) K N(d_2) \\ d_{1,2} &= \frac{\log \frac{L_t^{i,k}}{K} \pm \frac{1}{2} V(t, T_{k-1}^i)}{\sqrt{V(t, T_{k-1}^i)}}, \quad V(t, T) = \int_t^T \sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Let  $\mathbb{F}$  be the filtration of the Brownian motion  $W$  completed with the null sets and consider a pay-off  $H_T$  with  $\frac{H_T}{P_{T_{k-1}^i}(T_k^i)} \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ . By the martingale representation theorem, there exists a unique process  $\phi \in \mathbb{H}^2$  with

$$\frac{H_T}{P_{T_{k-1}^i}(T_k^i)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} \left[ \frac{H_T}{P_{T_{k-1}^i}(T_k^i)} \right] + \int_0^T \phi_t dW_t.$$

Now, for  $t \in [0, T]$ , let

$$\delta_t = \frac{\phi_t}{\delta_i \sigma_t L_t^{i,k}}$$

and consider a self-financing portfolio invested into the FRA contract (with strike  $K$ ) and into the risk-free zero-coupon bond with maturity  $T_k^i$ , with initial value

$$V_0 = P_0(T_k^i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_k^i}} \left[ \frac{H_T}{P_{T_{k-1}^i}(T_k^i)} \right],$$

and such that the quantity of zero-coupon bonds at time  $t$  is given by  $\delta_t$ . The value of this portfolio at time  $T_{k-1}^i$  writes

$$V_{T_{k-1}^i} = V_0 + \int_0^{T_{k-1}^i} \delta_t \delta_i d(P_t(T_k^i)(L_t^{i,k} - K)) + \int_0^{T_{k-1}^i} (V_t - \delta_t \delta_i P_t(T_k^i)(L_t^{i,k} - K)) dP_t(T_k^i).$$

By Itô's formula we can then write

$$\begin{aligned} \frac{V_{T_{k-1}^i}}{P_{T_{k-1}^i}(T_k^i)} &= \frac{V_0}{P_0(T_k^i)} + \delta_i \int_0^{T_{k-1}^i} \delta_t dL_t^{i,k} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_k^i}} \left[ \frac{H_{T_{k-1}^i}}{P_{T_{k-1}^i}(T_k^i)} \right] + \int_0^{T_{k-1}^i} \phi_t dW_t = \frac{H_{T_{k-1}^i}}{P_{T_{k-1}^i}(T_k^i)}. \end{aligned}$$

Therefore,  $V$  is the replicating portfolio for the contingent claim  $H_{T_{k-1}^i}$  and so the no arbitrage price of this claim at  $t = 0$  is given by  $V_0$ .

The rest of the proof is similar to that of Proposition 7.  $\square$

**A market formula for swaptions** The pay-off of a swaption (at date  $T_1^i$ ) is given by

$$(S_{T_0^i}(T_0^i, \delta_i, n) - K)^+ \delta_i \sum_{k=1}^n P_{T_0^i}(T_k^i)$$

Introducing the swap forward measure  $\mathbb{Q}^A$  which corresponds to the numéraire  $A_t := \delta_i \sum_{k=1}^n P_t(T_k^i)$ , the price of a swaption writes

$$\text{Swtn}_t(T_0^i, T_0^i, \delta_i, n, K) = \delta_i \sum_{k=1}^n P_t(T_k^i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^A} [(S_{T_0^i}(T_0^i, \delta_i, n) - K)^+],$$

where the swap rate is a martingale under  $\mathbb{Q}^A$ . Assuming that this martingale is log-normal, one obtains the Black formula for the swaption price.

**Two-curve LMM** Suppose that we do not want to model the dynamics of the swap rate directly, but instead want to price a swaption in a model for the Libor rates (or more generally price an exotic product which depends in a nonlinear way on the values of the Libor rates and risk-free zero coupons at the maturity date). Using the terminal measure  $\mathbb{Q}^{T_n^i}$  defined by

$$\frac{d\mathbb{Q}^{T_n^i}}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^{T_n^i} r_s ds}}{P_0(T_n^i)},$$

the swaption's price at time  $t$  writes

$$\text{Swtn}_t = P_t(T_n^i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_n^i}} \left[ \frac{\left( \delta_i \sum_{k=1}^n P_{T_0^i}(T_k^i) (L_{T_0^i}^{i,k} - K) \right)^+}{P_{T_0^i}(T_n^i)} \right].$$

This pay-off cannot be expressed as a function of the risky forward Libor rates  $L_{T_1^i}^{i,\cdot}$  only but is equal to

$$\left( \delta_i \sum_{k=1}^n (L_{T_0^i}^{i,k} - K) \prod_{j=1}^k (1 + \delta_i \tilde{L}_{T_0^i}^{i,j}) \right)^+,$$

where  $\tilde{L}_t^{i,j} = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{P_t(T_j^i)}{P_t(T_j^i + \delta_i)} - 1 \right)$  are the risk-free forward Libor rates. Therefore, to price such a product, it is necessary to model the *joint dynamics* of the forward rates for the two curves under  $\mathbb{Q}^{T_n^i}$ .

To build such a joint dynamic model is not a trivial task, and an in-depth discussion is out of scope of this introductory book. We refer the reader to Mercurio and Xie [2012], Mercurio [2010] for multicurve extensions of the Libor market model and to the papers Pallavicini and Tarengi [2010,?] and the recent book Grbac and Runggaldier [2016] for general accounts of post-crisis shifts and modeling approaches in the interest rate markets.

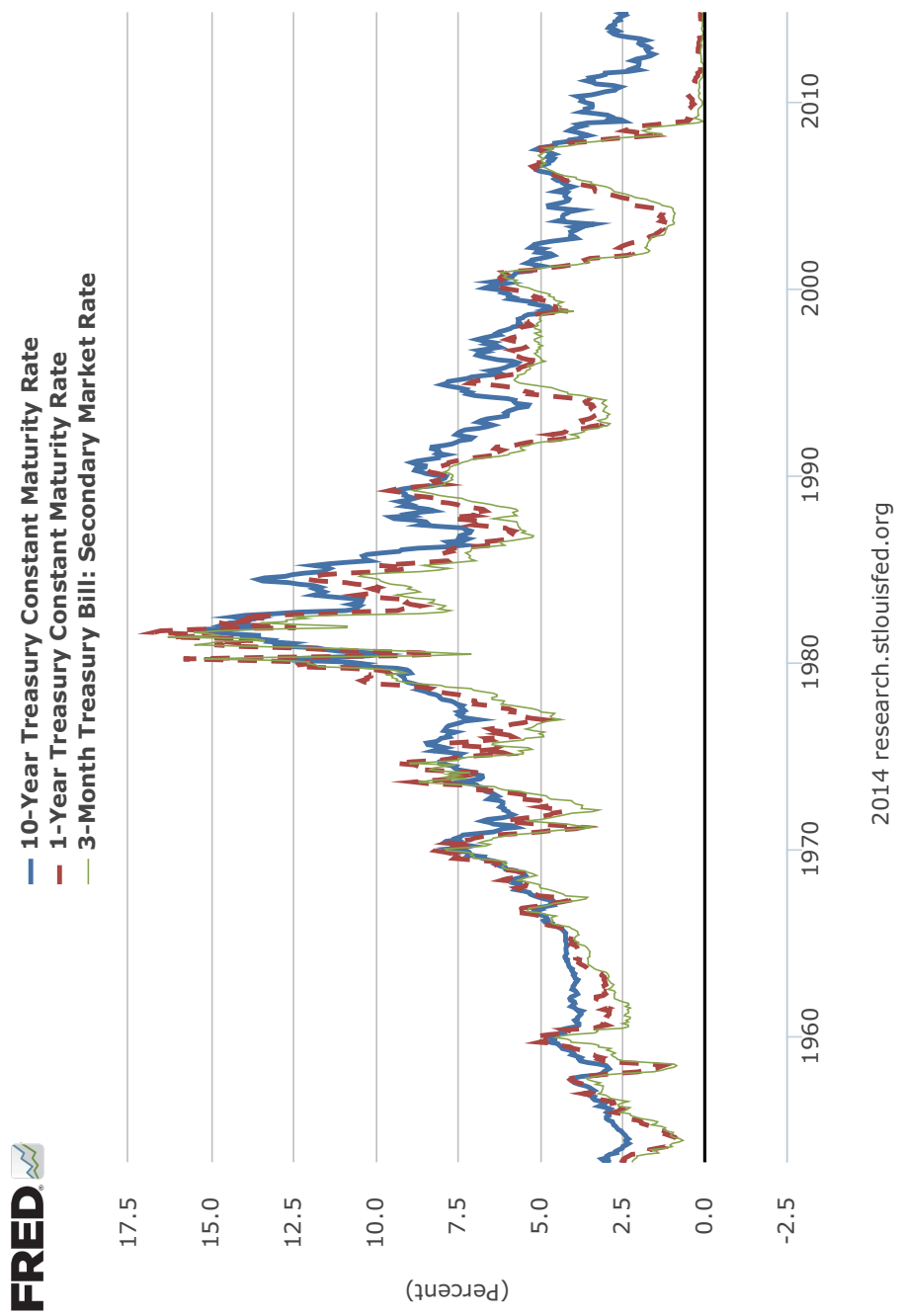


FIGURE 6.3 – Historical Treasury rates. Source : Federal Reserve Bank of St. Louis.

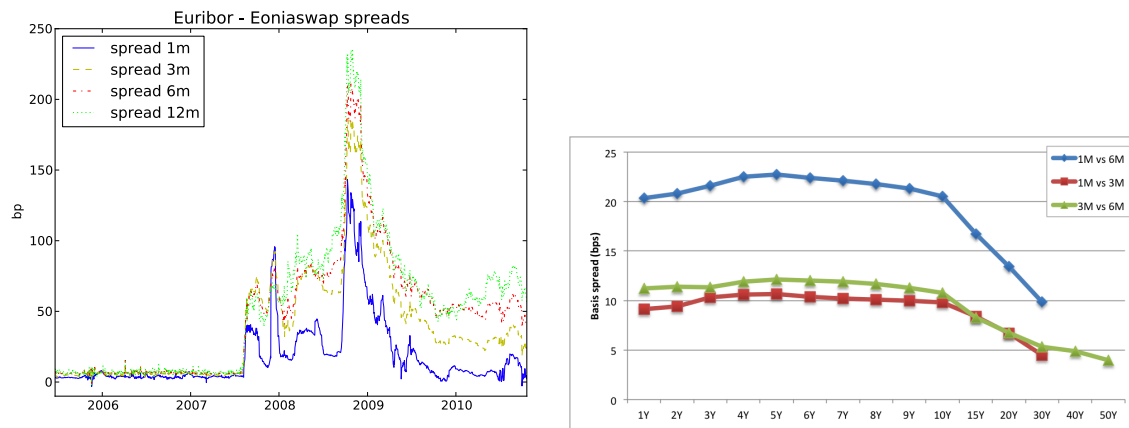


FIGURE 6.4 – Left : Libor-Eoniaswap spreads during the subprime crisis. Right : Decoupling of Libor rates for different maturities. Basis swap spreads observed on December 20, 2015.



# Chapitre 7

## Introduction aux modèles du risque de crédit et de contrepartie

### 7.1 Modélisation du risque de crédit

L'ISDA (International Swaps and Derivatives Association) utilise la définition suivante pour les “événements de crédit” qui déclenchent le paiement des produits dérivés de protection contre défaut.

- Faillite / cessation de paiements (décision de justice)
- Défaut de paiement d'un montant contractuel (pour les raisons de crédit)
- Restructuration (changement des conditions de la dette : extension des échéances, modification des coupons etc.)
- Moratoire (équivalent de faillite pour la dette souveraine)
- Violation d'une obligation contractuelle sans défaut de paiement (e.g., interdiction de verser les dividendes, obligation de maintenir un niveau donné du capital etc.)

Les produits dérivés sensible au risque de défaut tombent dans quatre catégories suivantes.

- Produits soumis au risque de défaut : obligations et tous les instruments de la dette
- Produits offrant une protection contre défaut : credit default swaps (CDS)
- Produits d'investissement : collateralized debt obligations (CDO)
- Produits de prévention de défaut : contingent convertible bonds (CoCos)

De plus, tous les produits dérivés négociés gré à gré sont soumis au risque de défaut de la contrepartie.

Dans la modélisation du défaut on distingue la modélisation historique, c'est-à-dire, l'estimation des probabilités de défaut pour les fins de gestion des risques et la modélisation risque-neutre pour évaluation des produits dérivés et le calcul du CVA (credit valuation adjustment). Dans ce poly on s'intéresse à la modélisation risque-neutre, où on peut distinguer les *modèles structurels* où le défaut à lieu dès que la valeur des actifs de la firme devient inférieure à sa dette et les *modèles à forme réduite* où à intensité où l'on modélise directement le temps de défaut comme variable exogène.

### 7.1.1 Modèles structurels

Le modèle de Merton (1974) est un grand classique de modèles structurels. Le célèbre modèle KMV (Kealhofer, Mcquown, Vasicek) est une implémentation du modèle de Merton dans sa version historique. Sous la probabilité historique, on suppose que la valeur des actifs suit un mouvement brownien géométrique :

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t$$

La dette a la maturité  $T$  et la valeur notionnelle  $L$  et la firme est en faillite en  $T$  si et seulement si  $V_T \leq L$ . Le montant remboursé est  $V_T \wedge L$ . La principale difficulté de cette approche est d'estimer la valeur des actifs de la firme et le montant de la dette.

En supposant que les actions de la firme sont négociables, la valeur de la dette s'écrit

$$D_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} \min(V_T, L)] = P_t(T)L - \text{Put}_t(T, V_t, L),$$

où  $\text{Put}_t(T, V_t, L)$  est le prix d'un put d'échéance  $T$  et strike  $L$  sur la valeur de la firme, dont la dynamique sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  est

$$dV_t = (r - q)V_t dt + \sigma V_t dW_t,$$

où  $q$  est le taux de dividendes.

**CDS dans le modèle de Merton** Un CDS est un contrat selon lequel l'acheteur de protection reçoit un paiement du vendeur de protection en cas de défaut d'une entité de référence, en échange d'un paiement régulier jusqu'à l'instant du défaut. Le montant du en cas de défaut est calculé comme le nominal de l'obligation moins le recouvrement. Le montant de recouvrement commun pour tous les CDS est déterminé lors de la vente aux enchères des obligations en défaut (credit event auction). Une hypothèse de taux de recouvrement de 0.6 est souvent faite, mais en pratique les taux peuvent être très différents : lors de la faillite de Lehman Brothers en 2008, le taux était de 0.08165, et pour Fannie Mae, grâce à la garantie de l'état américain, le taux était de 0.9151.

Soit  $R$  le taux de recouvrement (connu), et supposons que l'acheteur de protection verse au vendeur un flux continu de  $S(T) dt$  (en pourcentage du notionnel) entre  $t$  et  $t + dt$ . Alors le spread vérifie

$$S(T) = \frac{(1 - R)\mathbb{Q}[\tau \leq T]}{\int_0^T P_0(t) dt} = \frac{\text{LGD} \mathbb{Q}[\tau \leq T]}{\int_0^T P_0(t) dt},$$

où  $\text{LGD} = \text{loss given default}$ . Dans le modèle de Merton, avec taux d'intérêt constant,

$$S(T) = \frac{r(1 - R)}{1 - e^{-rT}} \mathbb{Q}[\tau \leq T] = \frac{r(1 - R)}{1 - e^{-rT}} N\left[\frac{\log(L/V_0) - (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right],$$

avec  $N$  la fonction de répartition de la loi normale. En particulier, si  $V_0 > L$ ,  $\lim_{T \downarrow 0} S(T) = 0 \Rightarrow$  le spread court terme est nul.

### 7.1.2 Modèles à forme réduite (à intensité)

Dans les modèles à intensité, le défaut est décrit comme le 1er instant de saut d'un processus à sauts avec une intensité déterministe ou stochastique. Le défaut n'est donc pas déterminé par les variables du marché mais a une composante exogène. Contrairement aux modèles structurels où le défaut est prévisible si on connaît toute l'information du marché, dans les modèles à intensité, le temps de défaut est imprévisible. Ces modèles sont particulièrement adaptés à la modélisation des spreads de CDS.



**Le temps du défaut** Soit  $\tau$  une v.a. positive sur  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  vérifiant  $\mathbb{P}[\tau = 0] = 0$  et  $\mathbb{P}[\tau > t] > 0$  pour tout  $t \geq 0$ . On introduit le processus de défaut  $H_t = \mathbf{1}_{\tau \leq t}$  et la filtration associée  $\mathcal{H}_t = \sigma(H_u : u \leq t)$  (information sur le temps de défaut). La *fonction de survie* de  $\tau$  est définie par

$$G(t) = \mathbb{P}[\tau > t]$$

et la *fonction de hasard* de  $\tau$  est définie par

$$\Gamma(t) = -\ln G(t).$$

Si  $G$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut écrire

$$\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s) ds,$$

où  $\gamma(s)$  est le *taux de hasard* de  $\tau$  (intensité du défaut). Dans ce cas,

$$M_t = H_t - \int_0^{t \wedge \tau} \gamma(u) du$$

est une  $\mathbb{H}$ -martingale, c'est-à-dire,  $\int_0^{t \wedge \tau}$  est le compensateur de  $\tau$ . Par exemple, si  $\tau$  est une v.a. exponentielle de paramètre  $\lambda$  alors

$$G(t) = e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(t) = \lambda t \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \lambda.$$

**Information du marché** Souvent on a besoin d'inclure dans la modélisation une information du marché autre que l'information sur le temps de défaut (cours des actifs, taux d'intérêt etc., facteurs stochastiques dans l'intensité de défaut). Dans ce but, on suppose qu'il existe une filtration  $\mathbb{F}$  (information du marché disponible avant le défaut).  $\tau$  n'est pas nécessairement un  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt. On définit enfin la filtration  $\mathbb{G} := \mathbb{H} \vee \mathbb{F}$  (information complète), c'est la plus petite filtration qui contient  $\mathbb{F}$  et qui rend  $\tau$  un temps d'arrêt.

Le *processus de survie* de  $\tau$  par rapport à  $\mathbb{F}$  est défini par  $G_t = \mathbb{P}[\tau > t | \mathcal{F}_t]$ . En supposant que  $G_t > 0$  pour tout  $t \geq 0$ , on définit le *processus de hasard* de  $\tau$  par rapport à  $\mathbb{F}$  via  $\Gamma_t = -\ln G_t$ . Si  $G_t$  est absolument continu, on pose  $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$ , où  $\gamma$  est l'intensité stochastique du défaut. On peut alors montrer que

$$M_t = H_t - \int_0^{t \wedge \tau} \gamma_u du$$

est une  $\mathbb{G}$ -martingale.

**Construction/simulation du temps de défaut** Soit  $\xi \sim U([0, 1])$  une v.a. sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , indépendante de  $\mathcal{F}_\infty$ . On suppose que  $\Gamma$  est continu et pose

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : e^{-\Gamma_t} \leq \xi\}.$$

Alors

$$G_t = \mathbb{P}[\tau > t | \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}[e^{-\Gamma_t} > \xi | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{P}\{e^{-\Gamma_t} > \xi | \mathcal{F}_\infty\} | \mathcal{F}_T] = e^{-\Gamma_t}$$

**Valorisation d'un actif soumis à défaut** Un *actif* soumis au défaut d'échéance  $T$  est un quadruplet  $(X, A, Z, \tau)$ , où

- $X \in \mathcal{F}_T$  est le pay-off en  $T$  si  $\tau > T$ .
- $A$  est le processus ( $\mathbb{F}$ -adapté) de dividendes payés jusqu'à  $\tau$ .
- $Z$  est le processus ( $\mathbb{F}$ -prévisible) de recouvrement.

La *valeur* à l'instant  $t$  de l'actif soumis à défaut est donnée par

$$V_t = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T B_u^{-1} (1 - H_u) A_u du + \int_t^T B_u^{-1} Z_u dH_u + B_T^{-1} X (1 - H_T) \middle| \mathcal{G}_t \right],$$

où  $\mathbb{Q}$  est la probabilité martingale et  $B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$  est l'actif sans risque. Cette valeur s'interprète comme la valeur des flux futurs associés à l'actif, elle est nulle après le défaut.

Soit  $Y$  une v.a. intégrable. Alors

$$\mathbf{1}_{\tau > t} \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}_t] = \mathbf{1}_{\tau > t} e^{\Gamma_t} \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{\tau > t} | \mathcal{F}_t]$$

On en déduit :

$$V_t = \mathbf{1}_{\tau > t} B_t e^{\Gamma_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (A_u + Z_u \gamma_u) du + B_T^{-1} e^{-\Gamma_T} X \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

ou bien

$$V_t = \mathbf{1}_{\tau > t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T e^{-\int_t^u (r_s + \gamma_s) ds} (A_u + Z_u \gamma_u) du + e^{-\int_t^T (r_s + \gamma_s) ds} X \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Le modèle avec défaut est donc équivalent au modèle sans défaut avec taux d'intérêt  $\hat{r}_t = r_t + \gamma_t$  et flux de dividendes  $\hat{A}_t = A_t + \gamma_t Z_t$ .

Pour distinguer l'effet des taux d'intérêt et du risque de défaut, introduisons la probabilité forward

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{e^{-\int_0^T r_s ds}}{P_0(T)}$$

Alors

$$V_t = \mathbf{1}_{\tau > t} \int_t^T du P_t(u) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^u} \left[ e^{-\int_t^u \gamma_s ds} (A_u + Z_u \gamma_u) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ + \mathbf{1}_{\tau > t} P_t(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[ e^{-\int_t^T \gamma_s ds} X \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

**Exemple : zéro-coupon soumis au défaut** Dans le cas du zéro-coupon avec recouvrement  $R$  à l'instant du défaut on a  $X = 1$ ,  $A = 0$  et  $Z_t = R$  pour tout  $t$  d'où

$$\tilde{P}_t(T) = \mathbf{1}_{\tau > t} \int_t^T du P_t(u) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^u} \left[ e^{-\int_t^u \gamma_s ds} R \gamma_u \middle| \mathcal{F}_t \right] + \mathbf{1}_{\tau > t} P_t(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[ e^{-\int_t^T \gamma_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Dans le cas de recouvrement  $RP_\tau(T)$  à l'instant du défaut, on a

$$\begin{aligned}\widehat{P}_t(T) &= \mathbf{1}_{\tau > t} \int_t^T du P_t(u) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^u} \left[ e^{-\int_t^u \gamma_s ds} RP_u(T) \gamma_u \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + \mathbf{1}_{\tau > t} P_t(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[ e^{-\int_t^T \gamma_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbf{1}_{\tau > t} P_t(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[ R \int_t^T e^{-\int_t^u \gamma_s ds} \gamma_u du + e^{-\int_t^T \gamma_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbf{1}_{\tau > t} P_t(T) \{ R(1 - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [e^{-\int_t^T \gamma_s ds} | \mathcal{F}_t]) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [e^{-\int_t^T \gamma_s ds} | \mathcal{F}_t] \}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\widehat{P}_t(T) &= \mathbf{1}_{\tau > t} P_t(T) \{ R + (1 - R) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [e^{-\int_t^T \gamma_s ds} | \mathcal{F}_t] \} \\ &= \mathbf{1}_{\tau > t} P_t(T) \left\{ R + (1 - R) \frac{\mathbb{Q}^T[\tau > T]}{\mathbb{Q}[\tau > t]} \right\}\end{aligned}$$

et pour  $t = 0$ ,

$$\widehat{P}_0(T) = P_0(T) \{ R + (1 - R) \mathbb{Q}^T[\tau > T] \}.$$

Lorsque l'intensité du défaut est déterministe,

$$\widehat{P}_0(T) = P_0(T) \{ R + (1 - R) e^{-\int_0^T \gamma(s) ds} \},$$

ce qui permet de calibrer l'intensité à partir des observations des prix des zéro-coupons soumis au défaut.

**Exemple : CDS** Dans le cas du CDS, avec paiement  $1 - R$  à l'instant du défaut, on a  $X = 0$ ,  $A_t = -S$  et  $Z_t = R$  pour tout  $t$  (pour l'acheteur du protection). On en déduit, à l'instant  $t = 0$ ,

$$\int_0^T du P_t(u) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^u} \left[ e^{-\int_0^u \gamma_s ds} (-S + (1 - R) \gamma_u) \right] = 0$$

d'où

$$S(T) = \frac{(1 - R) \int_0^T du P_t(u) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^u} \left[ e^{-\int_0^u \gamma_s ds} \gamma_u \right]}{\int_0^T du P_t(u) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^u} \left[ e^{-\int_0^u \gamma_s ds} \right]}$$

Si l'intensité est indépendante des taux d'intérêt,

$$S(T) = - \frac{(1 - R) \int_0^T du P_t(u) \frac{d}{du} \mathbb{Q}[\tau > u]}{\int_0^T du P_t(u) \mathbb{Q}[\tau > u]}$$

Cela permet de déduire les probabilités de défaut implicites et les intensités déterministes à partir des spreads de CDS observés sur le marché. Dans cette calibration on suppose généralement que l'intensité est constante ou linéaire par morceaux. Par exemple, si l'intensité est constante, on a tout simplement

$$\gamma = \frac{S(T)}{1 - R}.$$

L'hypothèse d'intensité déterministe n'est pas réaliste car les spreads ont des volatilités non-négligeables (50%) sur le marché. Dans le marché on distingue le risque de *spread* et le risque de *jump to default* ; pendant la crise de 2007-2008, 2/3 des pertes ont été attribué au risque de spread. De plus, corrélations entre les spreads et les facteurs de marché (taux, equity, etc.) sont une source important du risque additionnel (WWR). Pour en tenir compte, on utilise des modèles d'intensité stochastique similaires aux modèles de taux court, tels que le processus CIR :

$$d\gamma_t = k(\theta - \gamma_t)dt + \sigma\sqrt{\gamma_t}dW_t.$$

Dans ce modèle, on a des formules explicites pour les probabilités de défaut, permettant une calibration explicite aux spreads de CDS.

**Couverture du risque de crédit** La possibilité de défaut introduit une source de risque additionnel. Ce risque peut être couvert en complétant le marché avec un nouvel actif, sensible au risque de défaut : le zero-coupon soumis au défaut ou le CDS. Dans les modèles à intensité stochastique markoviens on a deux sources de risque : le défaut et la diffusion du spread.

## 7.2 Ajustement pour le risque de contrepartie (CVA/DVA)

Le risque de contrepartie est défini comme le risque associé aux pertes dues au défaut d'une contrepartie dans un contrat faisant intervenir des flux futurs tel qu'un produit dérivé (swap, option etc.). La crise de 2007–2008 a conduit à la reconnaissance progressive de la présence du risque de contrepartie dans toutes les transactions, même sur le marché interbancaire. Cette reconnaissance s'est traduit d'une part par l'adoption de différentes méthodes de réduction du risque de contrepartie telles que la collateralisation/CSA, les accords de netting, ou bien la création des contreparties centrales (chambres de compensation) pour les produits dérivés qui étaient négociés gré à gré auparavant, et d'autre part à une meilleure prise en compte du risque de contrepartie via les ajustements CVA / DVA au prix de référence.

### 7.2.1 Méthodes de réduction du risque de contrepartie

**Les accords de netting** En présence d'un *accord de netting* l'ensemble des positions de l'investisseur vis à vis d'une contrepartie sont considérées comme un montant unique. En l'absence d'un tel accord, en cas du défaut de la contrepartie les montant négatifs doivent être remboursés intégralement alors que les montant positifs ne sont recouverts que partiellement. L'accord de netting réduit l'ajustement pour le risque de contrepartie en rendant aussi son calcul plus complexe.

**Collateralisation** Un collateral est un actif appartenant à l'emprunteur qui est transféré au prêteur en cas de défaut de paiement. Dans les transactions interbancaires, les accords de collateralisation établissent les règles pour un transfert journalier des fonds en fonction de l'évolution de la valeur du marché des positions des contreparties. Les deux parties doivent donc re-évaluer régulièrement leur portefeuille de transactions, et être d'accord sur la valuation. Le collateral est rémunéré au taux d'intérêt en vigueur. Les règles de transfert de collateral sont décrites dans le Crédit Support Annex (CSA) dont la forme est standardisée par ISDA (International Swap and Derivatives Association). La collateralisation des produits dérivés est une procédure complexe qui ne peut être mise en place que par des grandes banques entre elles.

**Central clearing** Depuis la crise de 2007–2008 des chambres de compensation ont été créées pour plusieurs classes de produits dérivés liquides (e.g., CDS). La chambre de compensation est une contrepartie centrale (CCP) qui s’interpose dans chaque transaction et devient “acheteur pour tout vendeur et vendeur pour tout acheteur”. Une CCP demande à ces membres plusieurs contributions :

- Les *variation margins* sont ajustés plusieurs fois par jour en fonction du MtM des portefeuilles ;
- Des “initial margins” protègent la CCP contre le *gap risk*.
- Des contributions au fonds de défaut mutualisé permettent de faire face à la faillite d’un membre.

**Gap risk** : risque d’évolution des expositions entre deux ajustements du collateral ou entre la dernière date d’ajustement et la liquidation en cas de défaut.

### 7.2.2 Une brève introduction à la CVA

Supposons qu’une entité non soumise au risque de défaut (B) entre dans un swap receveur de taux non collateralisé avec une entité risquée (C). Si, à l’instant de défaut de C, la valeur du swap, notée par  $V_\tau$  est positive, B reçoit  $LGD \times V_\tau$ . Si l’exposition est négative, B doit payer  $V_\tau^-$ . Ceci crée un risque de perte pour B, qu’il valorise avec un ajustement négatif à la valeur du swap en l’absence du risque de défaut :

$$\bar{V}_0 = V_0 - UCVA_0,$$

où UVCA signifie “Unilateral Credit Value Adjustment”. Le CVA est d’autant plus important (en valeur absolue) que la qualité de crédit de C est mauvaise. La couverture du CVA peut être réalisé avec des instruments sensibles au risque de défaut (achat d’un CDS sur la contrepartie).

Pour sortir du swap, C doit payer à B le montant

$$-\bar{V}_0 = UCVA_0 - V_0.$$

Cela signifie, que C doit valoriser le swap avec un ajustement positif pour son propre risque de défaut : le DVA (Debit Value Adjustment) :

$$UDVA_0 = -UCVA_0.$$

Le DVA est d’autant plus grand que la qualité du crédit de C est mauvaise. Lorsque B et C sont soumis au défaut, chaque contrepartie applique à la fois le CVA (qui devient donc bilatéral) et le DVA. De manière qui peut paraître surprenante, une firme dont la qualité de crédit diminue, *enregistre des gains comptables* grâce à l’augmentation de son DVA (e.g., 2.5 milliards de dollars de gains pour Citigroup au 1er trimestre de 2009).

**Définition et calcul du CVA unilatéral** On calcule l’ajustement CVA pour une entité non soumise au risque de défaut (B) qui entre dans un contrat avec une entité risquée (C). Soient

- $V_t$  la valeur du contrat non soumis à défaut à l’instant  $t$  ;
- $\bar{V}_t$  la valeur du contrat soumis à défaut à l’instant  $t$  ;
- $A_t$  le processus de flux cumulés du contrat en l’absence de défauts ;
- $R$  le pourcentage de recouvrement.

Alors,

$$\begin{aligned}\bar{V}_t &= \mathbf{1}_{\tau > t} B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^{\tau \wedge T} B_u^{-1} dA_u + \mathbf{1}_{\tau \leq T} B_\tau^{-1} (R \times NPV_\tau^+ - NPV_\tau^-) \right], \\ &= \mathbf{1}_{\tau > t} V_t - B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau \leq T} B_\tau^{-1} (1 - R) \times NPV_\tau^+ \right], \\ \text{où } NPV_t &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T B_u^{-1} dA_u \right] \quad \text{et} \quad B_t = \exp \left( \int_0^t r_s ds \right).\end{aligned}$$

Le CVA unilatéral est donc donné par

$$UCVA_t = B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau \leq T} B_\tau^{-1} (1 - R) \times NPV_\tau^+ \right] = B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau \leq T} B_\tau^{-1} LGD \times NPV_\tau^+ \right]$$

Même si le contrat est linéaire (swap), le CVA introduit une optionnalité et donc une dépendance par rapport au modèle.

Dans le modèle à forme réduite avec intensité  $\gamma$ ,

$$UCVA_t = \mathbf{1}_{\tau > t} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T e^{-\int_t^u (r_s + \gamma_s) ds} LGD \times NPV_u^+ du \right]$$

Lorsque l'intensité du défaut est indépendante des taux,

$$UCVA_t = \mathbf{1}_{\tau > t} LGD \int_t^T du \mathbb{Q}[\tau > u] Swtn_t(u, T),$$

où  $Swtn_t(u, T)$  est le prix d'une swaption sur les flux du swap entre  $u$  et  $T$ .

**Wrong way risk** Le Wrong way risk (WWR) est une corrélation positive entre l'intensité de défaut et l'exposition au défaut, autrement dit, l'augmentation de l'intensité de défaut correspond à une augmentation des pertes potentielles en cas de défaut ce qui amplifie les risques de l'investisseur. Pour une bonne prise en compte du WWR il est nécessaire d'utiliser un modèle d'intensité stochastique avec une corrélation entre l'intensité et le sous-jacent du contrat. Supposons par exemple qu'une entité non soumise au défaut B entre dans un swap receveur de taux avec une entité risquée C. Une corrélation positive entre l'intensité de défaut de C et le niveau des taux conduit au WWR pour B. En effet, si le notionnel du swap est très important alors l'augmentation des taux entraîne une augmentation des paiements de C ce qui implique une augmentation de la probabilité de défaut. Le WWR apparaît donc ici de manière endogène. Sous l'hypothèse d'indépendance entre le sous-jacent et l'intensité du défaut le WWR n'est pas pris en compte et le CVA est donc sous-estimé en général quelle que soit la direction du swap si son notionnel est important

**Introduction au CVA bilatéral** Avant la crise de 2007-2008, les banques (B) avaient un spread de crédit très faible, et dans les transactions entre les banques et les entreprises (C), on supposait souvent que B était sans risque. Après la crise, cette hypothèse n'est plus réaliste : au moins dans le cas des transactions symétriques C demandera à B d'inclure un ajustement pour *son propre risque de contrepartie* dans le modèle.

Soit  $\tau_B$  et  $\tau_C$  les temps de défaut respectifs de B et C. La valeur du contrat soumis au défaut bilatéral est

$$\begin{aligned}\bar{V}_t &= \mathbf{1}_{\tau_B \wedge \tau_C > t} B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^{\tau_B \wedge \tau_C \wedge T} B_u^{-1} dA_u \right. \\ &\quad + \mathbf{1}_{\tau_C \leq \tau_B \wedge T} B_{\tau_C}^{-1} (\text{Rec}_C(NPV_{\tau_C}^+) - NPV_{\tau_C}^-) \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{\tau_B \leq \tau_C \wedge T} B_{\tau_B}^{-1} (-\text{Rec}_B(NPV_{\tau_B}^-) + NPV_{\tau_B}^+) \right] \\ \text{où } NPV_t &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T B_u^{-1} dA_u \right] \quad \text{et} \quad B_t = \exp \left( \int_0^t r_s ds \right)\end{aligned}$$

Autrement dit,  $\bar{V}_t = \mathbf{1}_{\tau_B \wedge \tau_C > t} V_t + CVA_t - DVA_t$ , où

$$\begin{aligned}CVA_t &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau_C \leq \tau_B \wedge T} B_{\tau_C}^{-1} LGD_C \times NPV_{\tau_C}^+ \right], \\ DVA_t &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau_B \leq \tau_C \wedge T} B_{\tau_B}^{-1} LGD_B \times NPV_{\tau_B}^- \right].\end{aligned}$$

Dans le calcul on a supposé que

$$NPV_t = B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T B_u^{-1} dA_u \right].$$

Cette hypothèse est connue sous le nom “risk-free close-out”. L’hypothèse alternative, “replacement close-out” suppose que le contrat est remplacé par un contrat identique avec une contrepartie sans risque (CCP) qui applique l’ajustement CVA :

$$\begin{aligned}\bar{V}_t &= \mathbf{1}_{\tau_B \wedge \tau_C > t} B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^{\tau_B \wedge \tau_C \wedge T} B_u^{-1} dA_u \right. \\ &\quad + \mathbf{1}_{\tau_C \leq \tau_B \wedge T} B_{\tau_C}^{-1} (\text{Rec}_C(NPV_{\tau_C}^B)^+ - (NPV_{\tau_C}^B)^-) \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{\tau_B \leq \tau_C \wedge T} B_{\tau_B}^{-1} (-\text{Rec}_B(NPV_{\tau_B}^C)^- + (NPV_{\tau_B}^C)^+) \right] \\ \text{où } NPV_t^B &= NPV_t + UDVA_t^B \quad \text{et} \quad NPV_t^C = NPV_t + UDVA_t^C.\end{aligned}$$

Dans l’industrie on utilise souvent la formule approchée  $\bar{V}_t = \mathbf{1}_{\tau_B \wedge \tau_C > t} V_t + UCVA_t - UDVA_t$ , où

$$\begin{aligned}UCVA_t &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau_C \leq T} B_{\tau_C}^{-1} LGD_C \times NPV_{\tau_C}^+ \right], \\ UDVA_t &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau_B \leq T} B_{\tau_B}^{-1} LGD_B \times NPV_{\tau_B}^- \right].\end{aligned}$$

Cette formule néglige la corrélation entre  $\tau_C$  et  $\tau_B$ , le “first-to-default problem”.

$$UCVA_t - CVA_t = B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{t < \tau_B < \tau_C \leq T} B_{\tau_C}^{-1} LGD_C \times NPV_{\tau_C}^+ \right].$$

La différence est faible si  $\tau_C$  et  $\tau_B$  sont indépendants mais peut être importante en cas de forte corrélation entre  $\tau_B$  et  $\tau_C$ .

**Couverture du CVA/DVA** Les ajustements CVA/DVA varient en fonction des spreads de crédit des parties, et des stratégies de couverture sont mises en place par les banques pour minimiser le risque de ces fluctuations. Le CVA peut être couvert comme un produit dérivé de crédit, à l'aide de CDS. La couverture du DVA n'est pas évidente : on ne peut pas vendre la protection sur soi-même. On utilise souvent la méthode de *proxy hedging* : vendre la protection sur des établissements similaires à soi-même, une technique qui peut réduire la volatilité du DVA mais amplifie le risque systémique.

**Polémique sur le DVA** Le DVA est nécessaire pour avoir un prix symétrique pour les deux contreparties dont la puissance de négociation est comparable. Cependant, il correspond à des gains ayant lieu *après le défaut* et donc sans valeur pour les actionnaires de l'entreprise. La réponse des régulateurs est ambigu : les normes comptables (FAS 157) autorisent à enregistrer les gains du DVA mais les règles de Bâle III interdisent cette pratique. En pratique, les transactions interbancaires sont le plus souvent collateralisées et les transactions banque – client ne sont pas symétriques ; le coût du défaut des banques n'est pas facturé par le client.

### 7.3 Coût du financement

Une banque qui a une position dans un produit dérivé doit emprunter de l'argent sur les marchés pour mettre en place une stratégie de couverture, poster du collateral, payer les coupons etc. Des cash flows positifs peuvent être placés sur le marché et générer des revenus. Avant la crise de 2007-2008, on considérait que le taux d'intérêt était le même pour les placements et pour les emprunts, ce qui permettait de ne pas tenir compte des coûts de financement (autrement que par actualisation). La vague de défauts de 2008 a conduit à un assèchement de liquidité sur le marché interbancaire et à l'augmentation des spreads pour les emprunts à court terme.

Cela a fait comprendre les agents du marché qu'on ne peut plus utiliser la même courbe sans risque pour évaluer les coûts de funding : chaque banque doit utiliser son propre coût de financement et calculer un ajustement de prix correspondant à son spread de crédit : le FVA. Le FVA est différent du DVA car il est lié aux coûts de financement propres à la banque, cependant les deux ajustements sont affectés par le spread de crédit et peuvent se compenser partiellement. La partie du DVA associé aux gains post-défaut liés au non-remboursement des emprunts de financement s'appelle DVA2. Le FVA ne peut pas être calculé en négligeant le risque de défaut car les coûts élevés du funding sont liés à une probabilité de défaut élevée. Néanmoins, dans la suite, pour introduire les principales notions dans un cadre simplifié, on présente un exemple de calcul du FVA en absence de risque de défaut.

**Coût de financement en absence de risque de défaut** Supposons qu'une banque vend une option de pay-off terminal  $H_T = h(S_T)$ . Le portefeuille de réplication est

$$V_t = B_t + \delta_t S_t.$$

La composante cash se décompose comme

$$B_t = C_t + (B_t - C_t)^+ - (B_t - C_t)^-$$

où  $C_t$  est la partie "collateral".



La dynamique de  $B_t$  est donc

$$dB_t = rC_t dt + (B_t - C_t)^+ \underline{r} dt - (B_t - C_t)^- \bar{r} dt,$$

où  $r$  est le taux sans risque auquel est rémunéré le collatéral,  $\underline{r}$  est le taux de placement et  $\bar{r}$  est le taux d'emprunt. La dynamique du portefeuille de réplcation est donc

$$dV_t = \delta_t dS_t + rC_t dt + (V_t - \delta_t S_t - C_t)^+ \underline{r} dt - (V_t - \delta_t S_t - C_t)^- \bar{r} dt.$$

Par ailleurs, dans le cas markovien, en supposant  $V_t = v(t, S_t)$ , la formule d'Itô donne

$$dV_t = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S_t^2 \sigma^2 dt + \frac{\partial v}{\partial S} dS_t.$$

En comparant les deux et en supposant que le collatéral est également fonction de  $t$  et  $S_t$ , on obtient une EDP non-linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 = rc + (v - c - S \frac{\partial v}{\partial S})^+ \underline{r} - (v - c - S \frac{\partial v}{\partial S})^- \bar{r}.$$

**Exemple : call Black-Scholes avec collateralisation complète** Supposons que  $h(S) = (S - K)^+$ , de sorte que  $v \geq 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial S} \geq 0$ .

Dans le cas de collateralisation complète,  $v \equiv c$  et l'équation devient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 = rv - S \frac{\partial v}{\partial S} \bar{r}.$$

La solution est donc

$$\begin{aligned} v(t, S) &= \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} h(S e^{\sigma W_{T-t} + (\bar{r} - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}) \right] \\ &> \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} h(S e^{\sigma W_{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}) \right] \end{aligned}$$

**Exemple : Collateralisation partielle** Supposons que

- L'une des parties est considéré sans risque (organisme public) et donc ne fournit pas de collatéral ;
- Le contrat est tel que  $\frac{\partial v}{\partial S} \geq 0$  (e.g., un contrat forward).

Dans ce cas  $c = v^+$  et l'équation devient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 = rv - S \frac{\partial v}{\partial S} \bar{r} - (\bar{r} - r)v^-.$$

Par la formule de Feynman-Kac,

$$v(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} h(\hat{S}_T^{t,S}) + (\bar{r} - r) \int_t^T e^{-r(u-t)} v^-(u, \hat{S}_u^{t,S}) du \right]$$

où

$$\hat{S}_u^{t,S} = S e^{(\bar{r} - \sigma^2/2)(u-t) + \sigma W_{u-t}}.$$

L'équation peut être résolue par itérations successives :

$$v_0(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} h(\hat{S}_T^{t,S}) \right]$$

$$v_{n+1}(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} h(\hat{S}_T^{t,S}) + (\bar{r} - r) \int_t^T e^{-r(u-t)} v_n^-(u, \hat{S}_u^{t,S}) du \right]$$

Si on considère un contrat forward de pay-off  $S_T - K$  en  $T$  alors,

$$v_0(t, S) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\hat{S}_T^{t,S} - K] = S e^{(\bar{r}-r)(T-t)} - K e^{-r(T-t)}$$

$$v_1(t, S) = v_0(t, S) + (\bar{r} - r) e^{(\bar{r}-r)(T-t)} \int_t^T \text{Put}(t, u, S, K e^{-\bar{r}(T-u)}, \sigma, \bar{r}) du.$$

Si le spread  $\bar{r} - r$  est petit, le premier terme est suffisant pour quantifier l'ajustement.

#### **Panorama des ajustements de prix**

- CVA : credit valuation adjustment : risque de défaut de la contrepartie ;
- DVA : debit valuation adjustment : son propre risque de défaut ;
- FVA : funding valuation adjustment : coûts de financement dus au spread de crédit ;
- DVA2 : gain post-défaut associée à la stratégie de financement ;
- KVA : capital valuation adjustment : coût associé au capital réglementaire.

# Bibliographie

- H. Berestycki, J. Busca, and I. Florent. Asymptotics and calibration of local volatility models. *Quant. Finance*, 2 :61–69, Feb 2002.
- Alan Brace, Dariusz Gatarek, and Marek Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Math. Finance*, 7(2) :127–155, 1997. ISSN 0960-1627.
- Haydyn Brown, David Hobson, and Leonard CG Rogers. Robust hedging of barrier options. *Mathematical Finance*, 11(3) :285–314, 2001.
- P. Carr, K. Ellis, and V. Gupta. Static hedging of exotic options. *Journal of finance*, 53 :1165–1190, 1998.
- Peter Carr and Dilip Madan. Towards a theory of volatility trading. In Robert Jarrow, editor, *Volatility*. Risk Publications, 1998.
- Marc Chesney, Monique Jeanblanc, and Marc Yor. *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer, London, 2009.
- Financial Crisis Inquiry Commission. *The Financial Crisis Inquiry Report : The Final Report of the National Commission on the Causes of the Financial and Economic Crisis in the United States Including Dissenting Views*. Cosimo, Inc., 2011.
- J. C. Cox. The constant elasticity of variance option pricing model. *Journal of Portfolio Management*, 22 :15–17, 1996.
- Emanuel Derman. *Models. Behaving. Badly. : Why Confusing Illusion with Reality Can Lead to Disaster, on Wall Street and in Life*. Simon and Schuster, 2011.
- Emanuel Derman and Paul Wilmott. The financial modelers’ manifesto. Available from SSRN : <http://ssrn.com/>, 2009.
- B. Dupire. Pricing with a smile. *RISK*, 7 :18–20, January 1994.
- Economist. Credit where credit’s due. *Economist*, April 19th, 2014.
- Nicole El Karoui. Couverture des risques dans les marchés financiers. Lecture notes for master ‘Probability and Finance’, Paris VI university.
- Avner Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. Courier Corporation, 2013.

- J. Gatheral. A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives. Presentation at the 2004 Global Derivatives conference, available from [http://www.math.nyu.edu/fellows\\_fin\\_math/gatheral/gatheral.htm](http://www.math.nyu.edu/fellows_fin_math/gatheral/gatheral.htm), 2004.
- Jim Gatheral and Antoine Jacquier. Arbitrage-free svi volatility surfaces. Preprint SSRN, 2012.
- Zorana Grbac and Wolfgang Runggaldier. *Interest rate modeling : post-crisis challenges and approaches*. Springer, 2016.
- Patrick S. Hagan and Diana E. Woodward. Equivalent black volatilities. *Applied Mathematical Finance*, 6(3) :147–157, 1999.
- Peter Jackel and Riccardo Rebonato. The link between caplet and swaption volatilities in a brace-gatarek-musiela/jamshidian framework : approximate solutions and empirical evidence. *Journal of Computational Finance*, 6(4) :41–60, 2003.
- Farshid Jamshidian. Libor and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, 1(4) : 293–330, 1997.
- David Xianglin Li. On default correlation : a copula function approach. *Journal of Fixed Income*, 9(4) :43–54, 2000.
- Fabio Mercurio. Modern libor market models : using different curves for projecting rates and for discounting. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(01) :113–137, 2010.
- Fabio Mercurio and Zhenqiu Xie. The basis goes stochastic. *Risk*, 25(12) :78, 2012.
- Kristian R Miltersen, Klaus Sandmann, and Dieter Sondermann. Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates. *The Journal of Finance*, 52(1) :409–430, 1997.
- Marek Musiela and Marek Rutkowski. Continuous-time term structure models : Forward measure approach. *Finance and Stochastics*, 1(4) :261–291, 1997.
- Andrea Pallavicini and Marco Tarenghi. Interest-rate modeling with multiple yield curves. *Available at SSRN 1629688*, 2010.
- Philip Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, Berlin, 1990.
- Riccardo Rebonato. *Modern pricing of interest-rate derivatives : The LIBOR market model and beyond*. Princeton University Press, 2002.
- M. Roper. Arbitrage free implied volatility surfaces. Preprint, 2010.
- Felix Salmon. Recipe for disaster : The formula that killed wall street. *Wired Magazine*, 17(3), 2009.
- Zeliade. Quasi-explicit calibration of Gatheral’s SVI model. Available from [www.zeliade.com](http://www.zeliade.com).