

## Chapitre 2

# Les produits dérivés

- Différents types des taux d'intérêt.
- Formule de valorisation d'un forward sur un actif financier (action, obligation).
- Classification des options et terminologie associée, forme des fonctions pay-off.
- Propriétés des prix des calls / puts en fonction du strike et du temps restant jusqu'à maturité.
- Stratégies classiques optionnelles : bull spread, bear spread, calendard spread, butterfly spread.
- Equivalence entre un call américain et un call européen.
- Principes de valorisation d'options ; différence entre valorisation actuarielle et valorisation financière.
- Modèles probabilistes du marché ; exemple du modèle binomial.

### 2.1 Forwards et futures

Un forward est un contrat entre deux contreparties dans lequel l'une des contreparties s'engage à vendre et l'autre à acheter un bien à une date donnée (notée par  $T$ ), à un prix donné (le prix à terme ou prix forward du bien). Le prix et les autres caractéristiques du contrat sont donc déterminés à la signature (date 0) mais la livraison et le paiement ont lieu à l'échéance (date  $T$ ). On dit que la partie qui s'engage à acheter le bien a une position longue, et la partie qui s'engage à vendre a une position courte. Les forwards, comme les autres produits dérivés, sont utilisés pour transférer les risques entre les participants du marché, pour la spéculation, ou bien pour exploiter des arbitrages potentiels.

- **Transfert des risques** : une compagnie travaillant à l'export peut utiliser des forwards sur taux de change pour éliminer le risque de fluctuation du cours d'une devise étrangère.
- **Spéculation** : un investisseur qui pense que le cours d'un indice va monter peut prendre une position longue en forwards sur cet indice pour réaliser un gain dans le cas d'un mouvement favorable du cours sans avoir à déboursier immédiatement de l'argent (ce qui serait nécessaire en investissant directement dans l'indice). Cette stratégie n'est pas une stratégie d'arbitrage car elle comporte un risque de perte dans le cas d'un mouvement défavorable du cours de l'indice.

- **Arbitrage** : si les forwards sont surévalués par rapport à la valeur du bien sous-jacent, on peut réaliser un gain sans risque en prenant une position courte en forwards et en achetant simultanément le bien pour le stocker jusqu'à l'échéance. Ainsi, la livraison du bien est assurée, et on récupère la différence entre le prix à terme et le prix spot (comptant) du bien, moins le coût de l'opération (financement + stockage).

Un future est un contrat qui permet de réaliser les mêmes objectifs qu'un contrat forward, mais qui est coté dans un marché organisé. Le rôle du marché est d'assurer la liquidité et d'éliminer le risque de contrepartie. La liquidité est assurée puisque les contrats sont standardisés : le nombre de différentes dates de livraison est limité et les sous-jacents sont décrits de manière précise. Ainsi, le nombre de différents contrats cotés est relativement faible et par conséquent, le volume pour chaque contrat est élevé ce qui permet de facilement trouver un acheteur / vendeur. De plus, pour chaque contrat standardisé le cours est publié en continu, rendant la valorisation plus transparente. Le risque de contrepartie est éliminé puisque tous les contrats ont une contrepartie unique : la chambre de compensation du marché, qui a très peu de chances de faire faillite.

Pour se protéger contre le défaut des participants du marché, la chambre de compensation utilise le dépôt de garantie et les appels de marge. Lorsqu'un agent prend une position courte ou longue sur un contrat future, il doit déposer un montant spécifique, qui dépend du cours du future, sur un compte ouvert auprès de la chambre de compensation (margin account). Ensuite, ce compte est crédité ou débité tous les jours d'un montant qui dépend de l'évolution du cours du future. Soit  $F_t$  le cours de clôture du future à la date  $t$ . Si l'investisseur a pris une position longue, à la date  $t$  son compte va être crédité d'un montant égal à  $F_t - F_{t-1}$ , et s'il a pris une position courte, son compte sera débité de ce même montant. Lorsque le solde du compte baisse au-delà d'un certain niveau, l'investisseur reçoit un appel de marge, qui l'informe qu'il doit compléter son dépôt initial par un montant approprié. Si le solde du compte devient élevé, l'investisseur peut en retirer une partie. A la date d'échéance du contrat, le compte est une dernière fois crédité / débité d'un montant égal à  $F_T - F_{T-1}$ , et le solde est remis à l'investisseur. Dans le cas d'un future avec règlement financier, le contrat s'arrête là ; avec livraison physique l'investisseur se voit livrer le bien sous-jacent et doit le payer au prix  $F_T$ .

### 2.1.1 Equivalence des prix de forwards / futures

Avant de procéder, il est important de fixer les notations concernant les taux d'intérêt.

**Taux d'intérêt** De manière générale le taux d'intérêt est une convention ; la quantité fondamentale sur les marchés est le coût du capital (prix d'une obligation), qui est unique ; mais ce prix peut être exprimé de différentes manières avec des taux d'intérêt différents.

Nous noterons par  $B_t(T)$  le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$  observé à la date  $t$ . Pour simplifier la notation, nous noterons parfois le prix de cette obligation observé à la date  $t = 0$  simplement par  $B(T)$ .

Dans ce poly, nous utiliserons essentiellement deux taux d'intérêt :

- Le taux périodique est défini par rapport à une période : jour, mois, année. Le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$  est alors donné par

$$B(T) = \frac{1}{(1+r)^T},$$

où  $r$  est le taux périodique et  $T$  est le nombre de périodes jusqu'à l'échéance ( $T$  est exprimé en années pour le taux annuel, en mois pour le taux mensuel etc.)

- Le taux continu ou exponentiel correspond à l'expression du prix de zéro-coupon

$$B(T) = e^{-rT},$$

où  $T$  est le temps jusqu'à l'échéance exprimé en années.

**Théorème 1.** *Supposons que le taux d'intérêt périodique journalier  $r$  est constant et le même pour les prêts et les emprunts. Alors le prix à terme d'un bien doit être égal, à toute date, au cours du contrat future de même échéance portant sur le même bien.*

*Démonstration.* Soit  $n$  l'échéance du contrat forward. On note par  $f_0$  le prix à terme à la date 0 et par  $F_k$  le cours du contrat future de même échéance à la date  $k \leq n$ . On utilise la stratégie suivante :

Date 0	Prendre une position longue sur $(1+r)^n$ forwards d'échéance $n$ et une position courte sur $1+r$ futures de même échéance
Date $k, 0 < k < n$	Payer l'appel de marge d'un montant $(1+r)^k(F_k - F_{k-1})$ ; ajuster la position en contrats futures à $(1+r)^{k+1}$ contrats
Date $n$	Payer le dernier appel de marge d'un montant $(1+r)^n(F_n - F_{n-1})$

On suppose que les montants des appels de marge payés / reçus aux dates intermédiaires sont soit empruntés à la banque au taux  $r$  soit placés au taux  $r$  (en fonction de leur signe) ; l'appel payé ou reçu à la date  $k$  doit donc être actualisé au taux  $r$  entre la date  $k$  et la date  $n$ . Par ailleurs, à la date  $n$ , on est long de  $(1+r)^n$  forwards et court de  $(1+r)^n$  contrats futures, qui arrivent tous à l'échéance. Le bilan de l'opération est donc

Appels de marge actualisés :	$-(1+r)^n(F_n - F_0)$
Contrats futures :	$(1+r)^n(F_n - S_n)$
Contrats forward :	$(1+r)^n(S_n - f_0)$
Soit au total :	$(1+r)^n(F_0 - f_0)$

Supposons que  $F_0 > f_0$ . Alors cette stratégie, à coût nul, est clairement un arbitrage. Si, au contraire,  $F_0 < f_0$ , alors la stratégie opposée (position courte en forwards et longue en futures) est

un arbitrage. On conclut que  $f_0$  doit être égal à  $F_0$  : le cours d'un contrat future est égal au prix à terme.  $\square$

### 2.1.2 Valorisation des forwards par non-arbitrage

En vue de l'équivalence entre forwards et futures démontrée au paragraphe précédent, nous nous concentrons désormais sur la valorisation des forwards. Le premier exemple concerne le forward sur un actif pouvant être vendu à découvert : un actif financier, ou un marchandise non-périssable qui est utilisé comme un investissement et peut être emprunté pour être vendu à découvert (par exemple, metal précieux).

**Théorème 2** (Forward sur un actif pouvant être vendu à découvert). *Le prix à terme d'échéance  $T$  d'un actif pouvant être vendu à découvert est donné par*

$$F = e^{rT}(S - I),$$

où  $S$  est le prix spot et  $I$  est la valeur présente en  $T = 0$  des dividendes (coupons) versés par l'actif (dans ce cas  $I > 0$ ) ou bien le coût de stockage de l'actif entre 0 et  $T$ , payable en  $T = 0$  (dans ce cas  $I < 0$ ).

*Démonstration.* Supposons dans un premier temps que  $F > e^{rT}(S - I)$ . Alors, la stratégie suivante à coût nul, permet de réaliser un gain de  $F - e^{rT}(S - I)$ . C'est donc un arbitrage (connu sous le nom d'arbitrage cash and carry).

Date 0	Prendre une position courte sur le forward ; emprunter le montant $S$ (si $I \geq 0$ ) ou $S - I$ (si $I < 0$ ) à la banque ; acheter l'actif ; payer le coût de stockage (si $I < 0$ )
Entre 0 et $T$	Stocker l'actif ; le cas échéant, récupérer les dividendes (coupons) et les placer à la banque
Date $T$	Livrer l'actif et récupérer le montant $F$ dans le cadre du contrat forward ; si $I < 0$ , rembourser $e^{rT}(S - I)$ à la banque ; si $I \geq 0$ , rembourser $e^{rT}S$ à la banque et récupérer les dividendes capitalisés $Ie^{rT}$ .

Cet argument montre que nécessairement  $F \leq e^{rT}(S - I)$  : puisque le forward permet de posséder l'actif à la date  $T$ , le prix à terme ne peut être supérieur au prix spot de l'actif plus le coût additionnel du capital nécessaire pour acheter l'actif aujourd'hui au lieu de le faire à la date  $T$  moins le montant de dividendes qu'on touche si on détient l'actif entre 0 et  $T$ . Remarquons que pour l'inégalité dans ce sens, la vente à découvert n'est pas nécessaire ; cette inégalité a donc une validité plus large que l'inégalité dans le sens opposé que nous allons maintenant démontrer.

Supposons maintenant que  $F < e^{rT}(S - I)$ . Alors, la stratégie suivante est un arbitrage.

Date 0	Prendre une position longue sur le forward ; vendre l'actif à découvert (l'emprunter puis le vendre) ; récupérer le coût de stockage (si $I < 0$ ) ; placer le montant $S$ (si $I \geq 0$ ) ou $S - I$ (si $I < 0$ ) à la banque ;
Date $T$	Si $I < 0$ , récupérer $e^{rT}(S - I)$ à la banque ; si $I \geq 0$ , récupérer $e^{rT}S$ à la banque. Prendre livraison de l'actif moyennant le paiement du prix $F$ dans le cadre du contrat forward ; restituer l'actif à celui à qui on l'avait emprunté ; si $I > 0$ , lui verser les dividendes capitalisés $Ie^{rT}$ .

Puisque cette deuxième stratégie nécessite de vendre à découvert l'actif, elle est plus difficile à mettre en place ; le prêt de l'actif ne sera typiquement pas gratuit (taux repo) et il y a le danger de rachat forcé : les courtiers forcent souvent leurs clients à racheter les titres vendus à découvert lorsque leurs prix montent trop brutalement.  $\square$

**Forwards sur marchandises** Lorsque le sous-jacent du contrat forward est un bien non-financier, qui est détenu non pas comme investissement mais par exemple parce qu'il fait partie d'un cycle de production, il n'est en général pas possible de l'emprunter pour le vendre à découvert. Dans ce cas le prix forward vérifie uniquement

$$F \leq e^{rT}(S + U),$$

où  $U$  est le coût de stockage, avec en général une inégalité stricte. La différence entre la partie droite et la partie gauche correspond à l'utilité additionnelle que l'agent économique tire du fait qu'il détient physiquement l'actif :

$$F = e^{rT}(S + U - Y).$$

Pour avoir des quantités indépendantes du temps et du volume, on écrit souvent

$$F = F(T) = e^{(r+u-y)T}S,$$

où  $u$  est le coût de stockage par unité de temps et par unité d'actif, et  $y$  est appelé la prime de convenance (convenience yield). Si l'actif est facilement disponible sur le marché, la prime de convenance n'est pas très élevée et  $r + u - y > 0$  : la courbe des prix à terme  $(F(T))_{T \geq 0}$  est croissante ; on dit qu'elle est en report (ou en contango en anglais). S'il y a un risque de rupture des stocks, il est important de détenir l'actif physiquement pour assurer la continuité de production et la prime de convenance peut être élevée : dans ce cas,  $r + u - y < 0$  et la courbe des prix à terme est décroissante ; on dit qu'elle est en déport (backwardation en anglais).

## 2.2 Introduction aux options

Les options les plus simples, de type Call et Put, sont une extension très naturelle des forwards : alors qu'un forward donne à son détenteur l'obligation d'acheter / vendre l'actif sous-jacent à une date future à un prix déterminé, l'option Call européen donne à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent à une date d'échéance future  $T$  à un prix déterminé  $K$ , appelé prix d'exercice ou strike, et l'option Put européen donne le droit mais non l'obligation de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$ . Les options Call et Put américaines donnent le droit d'acheter ou vendre l'actif sous-jacent à la date  $T$  ou à toute date future antérieure à  $T$ .

Lorsqu'à la date  $T$ , le détenteur d'un Call ou Put exerce le droit que lui confère son option, il touche  $S_T - K$  pour un Call et  $K - S_T$  pour un Put. Il est clair qu'il n'exercera son droit que si le montant qu'il récupère est positif : le détenteur d'un Call touche donc systématiquement le montant

$$H_T = (S_T - K)^+$$

et pour un Put, le montant

$$H_T = (K - S_T)^+,$$

où la notation  $()^+$  désigne la partie positive. Ce montant  $H_T$  s'appelle le pay-off de l'option.

**Terminologie**

- $K$  : *strike* (prix d'exercice).
- $T$  : date de maturité (échéance).
- Une option est *à la monnaie* à la date  $t$  si à cette date  $K = S_t$ .
- Une option est *dans la monnaie* : si elle devait expirer aujourd'hui son pay-off serait positif.
- La *valeur intrinsèque* d'une option est la quantité d'argent qu'elle rapporterait si elle devait expirer aujourd'hui (la valeur du pay-off aujourd'hui).
- La *valeur temps* d'une option est égale à son prix moins sa valeur intrinsèque.

**Notation**

Nous noterons par  $\text{Call}_t(T, K)$  le prix d'un Call européen d'échéance  $T$  et strike  $K$  observé à la date  $t$ . Nous écrirons parfois également  $\text{Call}(T, K)$  lorsque  $t = 0$ . Le prix d'un Call américain sera noté par  $\text{CallAmer}_t(T, K)$ , et les prix des Puts européen et américain, respectivement, par  $\text{Put}_t(T, K)$  et  $\text{PutAmer}_t(T, K)$ .

Les options plus complexes, qu'on appelle les options exotiques, dont quelques exemples sont donnés ci-dessous, sont souvent définies directement en termes de leur pay-off.

- Options à barrière : le paiement a lieu (n'a pas lieu) si le sous-jacent a dépassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date. Exemple (up and out call)

$$H_T = (S_T - K)^+ 1_{M_T < B}, \quad \text{où } M_T = \max_{t \leq u \leq T} S_u$$

- L'intérêt de cette option est qu'elle est moins chère que la call standard mais offre des garanties très similaires en situation normale (si la barrière est suffisamment haute).

- Options asiatiques : le payoff dépend de la valeur moyenne du cours de l'actif sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix) :

$$H_T = \left( \frac{1}{T-t} \int_t^T S_u du - K \right)^+$$

- Options multi-sous-jacent : sur un panier d'actions, un panier de taux de change etc.

$$H_T = \left( \sum_{i=1}^n w_i S_T^i - K \right)^+$$

- Options forward start. Le strike d'une telle option est déterminé à une date future selon une règle spécifique, par exemple,

$$H_T = (S_T - mS_{T_0})^+,$$

où  $T_0 < T$  est une date future et  $m$  est un nombre fixé dans le contrat (moneyness de l'option).

Comme les futures et les forwards, les options peuvent être utilisées pour le transfert des risques, pour prendre des paris sur l'évolution des actifs de base, et éventuellement pour exploiter des arbitrages potentiels, tout en offrant beaucoup plus de liberté et souplesse dans ces utilisations. Les deux exemples suivants illustrent l'utilisation d'options pour contrôler et limiter les risques associés aux fluctuations des cours boursiers.

*Exemple 1* (Put protectif). Un Put protectif est une combinaison d'une position longue dans un actif et d'une option Put sur le même actif. Le pay-off à l'échéance de l'option est alors donné par  $H_T = (K - S_T)^+ + S_T = \max(S_T, K)$ . Ce montage permet donc de limiter les pertes à un niveau  $K$  souhaité.

*Exemple 2* (Constitution d'un fonds garanti). Certains fonds d'investissement offrent à leurs clients une garantie de performance minimale. Ce type de garantie peut être mis en place en utilisant des options. Supposons que l'investissement initial est normalisé à 1, et que l'investisseur est assuré de recevoir au moins  $K$  à l'échéance  $T$ . Pour ne pas créer une opportunité d'arbitrage, la valeur  $K$ , appelée le plancher, doit être choisi de sorte que  $KB(T) < 1$ , où  $B(T)$  est le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$ . La stratégie suivante permet alors de respecter la contrainte tout en gardant un potentiel de gain :

- Investir une fraction  $\lambda$  du fonds dans l'actif risqué  $S$ . Pour simplifier la notation nous supposons que la valeur initiale de l'actif risqué a également été normalisée à 1.
- Utiliser le montant résiduel pour l'achat d'un Put sur  $\lambda S$  d'échéance  $T$  et strike  $K$ , ou, de manière équivalente,  $\lambda$  Puts sur  $S$  de strike  $K/\lambda$ .

Le pay-off de la partie optionnelle à la date  $T$  est égal à  $(K - \lambda S_T)^+$ , et la valeur du fonds est donnée par

$$\lambda S_T + (K - \lambda S_T)^+ = \max(K, \lambda S_T).$$

Pour que cette allocation soit réalisable, la valeur  $\lambda$  doit vérifier la contrainte du budget : la somme du montant investi en l'actif risqué et du prix de l'option doit valoir 1 :

$$\lambda + \text{Put}^{\lambda S}(T, K) = 1, \tag{2.1}$$

où  $\text{Put}^{\lambda S}(T, K)$  est le prix de l'option sur  $\lambda S$  d'échéance  $T$  et strike  $K$ . Soit

$$f(\lambda) = \lambda + \text{Put}^{\lambda S}(T, K)$$

Alors,  $f(0) = KB(T) < 1$  et  $f(1) = 1 + \text{Put}^S(T, K) > 1$ . Donc, si  $f(\lambda)$  est une fonction continue, il existe  $\lambda^* \in (0, 1)$  qui vérifie (2.1).

En tant qu'un produit spéculatif, les options permettent de prendre des paris sur certains scénarios d'évolution du marché selon les stratégies suivantes.

**Stratégies optionnelles**

- L'achat d'un Call permet de parier sur la hausse du sous-jacent, et l'achat d'un Put sur la baisse, avec beaucoup plus de levier, mais aussi beaucoup plus de risque que l'achat du sous-jacent lui-même.
- Le Bull spread (achat d'un Call de strike  $K_1$ , vente d'un Call de strike  $K_2 > K_1$ , de même échéance) et le Bear spread (vente d'un Put de strike  $K_1$ , achat d'un Put de strike  $K_2 > K_1$ , de même échéance) sont aussi des paris directionnels ; ils ont l'avantage d'être moins chers que les options elle-mêmes, mais les gains sont limités.
- Le Straddle (achat simultané d'un Call et un Put de même strike, typiquement choisi égal à la valeur présente du sous-jacent, et même échéance) permet de parier sur la hausse de volatilité du sous-jacent (plus le sous-jacent s'éloigne de sa valeur présente, plus le straddle va rapporter).
- Le Butterfly spread (achat d'un Call de strike  $K - h$  et d'un Call de strike  $K + h$  ; vente de 2 Calls de strike  $K$ , tous de même échéance — où le strike  $K$  est typiquement égal à la valeur présente du sous-jacent) permet de parier sur la baisse de la volatilité : le pay-off est maximal si le sous-jacent reste proche de sa valeur.
- Le calendar spread (achat d'un Call de strike  $K$  et échéance  $T_1$  et vente d'un Call de strike  $K$  et échéance  $T_2 < T_1$ ) permet également de parier sur la hausse de la volatilité.

**2.2.1 Propriétés des prix de calls/puts**

Dans cette section, pour obtenir les relations vérifiées par les prix des différentes options, nous allons employer une propriété plus faible que l'absence d'arbitrage : la non-domination.

**Définition 1** (Propriété de non-domination). Soit  $X$  le gain terminal d'une stratégie de coût initial  $x$ . Si  $X \geq 0$  dans tous les états de la nature alors  $x \geq 0$ .

Il est facile de voir qu'il existent des marchés vérifiant la non-domination et admettant des arbitrages.

**Parité call-put** Supposons dans un premier temps que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende. Alors, les prix du Call et du Put de même strike et même échéance sont liés par la relation suivante :

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB_t(T),$$

En effet, à la date  $T$ , on a

$$\text{Call}_T(T, K) - \text{Put}_T(T, K) = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

Par le principe de non-domination, à la date  $t$ , la différence entre le prix du Call et le prix du Put de même strike et échéance doit donc être égale au prix d'un portefeuille dont la valeur à la date  $T$  est  $S_T - K$ , c'est-à-dire à  $S_t - KB_t(T)$ .

**Bornes sur les prix des calls et puts** En conséquence de la parité call-put, on obtient les bornes suivantes pour les prix de calls / puts :

$$(S_t - K)^+ < (S_t - KB_t(T))^+ \leq \text{Call}_t(T, K) \leq S_t. \quad (2.2)$$

$$(KB_t(T) - S_t)^+ \leq \text{Put}_t(T, K) \leq KB_t(T). \quad (2.3)$$



La valeur temps d'une option Call sur un actif ne versant pas de dividende est donc toujours positive.

**Dépendance des prix d'options par rapport aux paramètres**

- Le prix d'un Call est décroissant par rapport au strike (et le prix d'un Put est croissant)

$$K_1 \leq K_2 \Rightarrow \text{Call}(T, K_1) \geq \text{Call}(T, K_2).$$

Cette propriété découle de l'existence de la stratégie Bull spread qui consiste à acheter un Call de strike  $K_1$  et à vendre un Call de strike  $K_2$ . Comme cette stratégie a un pay-off positif, son prix doit être positif. De plus, le pay-off d'un Bull spread ou d'un Bear spread est borné par  $|K_2 - K_1|$ ; cela implique que  $\text{Call}_t(T, K)$  et  $\text{Put}_t(T, K)$  sont Lipschitz en  $K$  avec la constante  $B_t(T)$ .

- Les prix des Calls/Puts sont convexes par rapport au strike. Cette propriété correspond à la stratégie Butterfly spread. On vérifie que cette stratégie a également un pay-off positif dans tous les états de la nature ce qui implique la convexité.
- Le prix d'un Call est croissant avec la maturité :  $T_1 \leq T_2$  implique  $\text{Call}(T_1, K) \leq \text{Call}(T_2, K)$ . Cette propriété correspond à la stratégie Calendar spread : acheter un Call de maturité  $T_2$  et vendre un Call de même strike de maturité  $T_1$ . A la date  $T_1$ , cette stratégie a un pay-off positif par (2.2); son prix doit donc être positif à toute date.

**Cas d'un sous-jacent versant des dividendes** Pour des options sur un sous-jacent versant des dividendes la relation de parité Call-Put est modifiée. A l'échéance nous avons toujours

$$\text{Call}_T(T, K) - \text{Put}_T(T, K) = S_T - K,$$

cependant pour percevoir ce flux à la maturité, il n'est pas nécessaire d'investir  $S_t - B_t(T)K$  à la date  $t$ . Si l'action verse des dividendes discrets connus  $D_1, \dots, D_N$  aux dates  $t_1, \dots, t_N < T$ , alors en achetant une action et en empruntant

$$\sum_{i=1}^N D_i B_t(t_i) + K B_t(T)$$

à la banque à la date  $t$ , on aura le flux  $S_T - K$  à la date  $T$ . La parité Call-Put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - \sum_{i=1}^N D_i B_t(t_i) - K B_t(T).$$

Pour les indices contenant plusieurs actions, on utilise un général l'approximation de taux de dividende continu, i.e., on suppose que l'indice  $S_t$  verse en continu un dividende égal à  $qS_t dt$ . Dans ce cas il est facile de voir que pour s'assurer d'avoir  $S_T$  à la maturité, on doit investir le montant  $S_t D_t(T)$  à la date  $t$ , où  $D_t(T) = e^{-q(T-t)}$ . La parité Call-Put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t D_t(T) - K B_t(T).$$

La dérivation des bornes analogues à (2.2)–(2.3) est laissée en exercice.

### 2.2.2 Option américaines

Pour les options américaines, l'exercice est possible à toute date  $t$  avant la maturité  $T$  ou à la maturité. Le prix d'une option américaine est donc en général supérieur au prix de l'option européenne correspondante :

$$\text{CallAmer}_t(T, K) \geq \text{Call}_t(T, K), \quad \text{PutAmer}_t(T, K) \geq \text{Put}_t(T, K).$$

La différence entre les deux prix s'appelle la *prime d'exercice anticipée*. Dans le cas particulier du Call américain sur un actif ne versant pas de dividende, par la formule (2.2), on a

$$\text{CallAmer}_t(T, K) \geq \text{Call}_t(T, K) > (S_t - K)^+, \quad t < T.$$

En l'absence de dividendes, il n'est donc jamais optimal d'exercer le call américain avant l'échéance, et le prix du call américain est égal au prix de l'option européenne correspondante.

Pour le Put, la situation est très différente. Supposons qu'à une date  $t$ ,  $S_t < K(1 - B_t(T))$ . Alors l'exercice immédiat de l'option rapporte  $K - S_t > KB_t(T)$ , alors que le prix de l'option européenne est borné par  $KB_t(T)$  par la formule (2.3). Dans cette situation, le prix du Put américain est donc strictement supérieur à celui du Put européen et la prime d'exercice anticipée est strictement positive. Il est alors intéressant de comprendre de combien le prix du Put américain peut excéder le prix du Put européen. Le résultat suivant donne une réponse à cette question.

**Théorème 3.** *Supposons que le taux d'intérêt est constant et égal à  $r$ . Alors,*

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) \leq K(1 - e^{-r(T-t)}).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque pour  $s > t$

$$(K - S_s)^+ \leq (Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+ + K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)}),$$

le prix à la date  $t$  d'un Put américain est majoré par la somme du prix d'une option américaine qui verse  $(Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+$  si elle est exercée en  $s$  et de la quantité  $K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)})$ . Or,

$$(Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+ < (Ke^{-r(T-s)} - S_s)^+ \leq \text{Put}_s(T, K),$$

ce qui montre que cette option américaine modifiée ne sera jamais exercée avant l'échéance, et que donc son prix coïncide avec le prix du Put européen. On en déduit :

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) \leq K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)}),$$

et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, le théorème est démontré. □

## 2.3 Principes de valorisation d'options

Nous avons vu que les contrats à terme financiers peuvent être valorisés par le seul principe de non domination, alors que pour les options cette méthode ne donne que des bornes sur les prix possibles, et ne permet pas de déterminer le prix précisément. Pour donner un prix à ces produits plus complexes, il faudra faire appel à un modèle probabiliste du marché, c'est-à-dire, décrire l'ensemble des scénarios possibles d'évolution future du marché avec les probabilités associés et définir

les portefeuilles admissibles, c'est-à-dire les stratégies d'investissement qui peuvent être utilisées par les agents. Parmi tous les portefeuilles admissibles on distingue les portefeuilles *autofinancés* qui sont celles où aucun financement additionnel n'est apporté au portefeuille après sa création, et le gain provient uniquement de la variation des cours des actifs détenus par l'investisseur. Dans ce contexte, la propriété d'absence d'arbitrage sur le marché est formulée de la manière suivante.

Il n'existe pas de portefeuille autofinancé, de coût initial nul, tel que sa valeur à une date future  $T$  est positive presque sûrement et strictement positive avec une probabilité non nulle.

Si la classe des portefeuilles admissibles est suffisamment grande, on peut en trouver un dont la valeur terminale coïncide avec le pay-off de l'option qu'on cherche à valoriser. On dit alors que le portefeuille réplique l'option. L'absence d'arbitrage implique que le prix de l'option à la date initiale coïncide avec la valeur initiale du portefeuille de réplification. Le vendeur de l'option peut, en théorie, complètement éliminer son risque en achetant le portefeuille de réplification correspondant. Mais le prix de non-arbitrage dépend fortement du modèle choisi et en pratique ne constitue qu'une approximation de la valeur du produit financier qui sera d'autant plus précise que le modèle est réaliste.

**Modèle binomial à une période** Pour donner un exemple de valorisation par réplification, considérons un marché extrêmement simple, où le trading n'a lieu qu'à deux dates,  $t = 0$  et  $t = 1$ . Le marché consistera de deux actifs, dont les prix à la date  $t = 0$  sont notés respectivement par  $S_0^0$  et  $S_0^1$  et les prix à la date  $t = 1$  sont  $S_1^0$  et  $S_1^1$ . L'actif  $S^0$  est sans risque, dans le sens que  $S_1^0$  est déterministe :  $S_1^0 = (1+r)S_0^0$  où  $r > 0$  est le taux d'intérêt. L'actif  $S^1$  est risqué : sa valeur en  $t = 1$  n'est pas connue en  $t = 0$  et peut prendre deux valeurs possibles :  $S_1^1 = uS_0^1$  avec probabilité  $p$  et  $S_1^1 = dS_0^1$  avec probabilité  $1-p$ . Essayons de construire un portefeuille de réplification pour une option européenne de pay-off  $h(S_1^1)$  à la date  $t = 1$ . Soit  $\phi^0$  la quantité d'actifs sans risque dans le portefeuille et  $\phi^1$  la quantité d'actif risqué. Alors la condition de réplification dans les deux scénarios d'évolution du marché donne

$$\phi^0 S_0^0(1+r) + \phi^1 S_0^1 d = h(S_1^0 d), \quad \phi^0 S_0^0(1+r) + \phi^1 S_0^1 u = h(S_1^0 u).$$

En résolvant ces équations, on trouve la stratégie optimale

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1+r)S_0^0 & dS_0^1 \\ (1+r)S_0^0 & uS_0^1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h(dS_0^1) \\ h(uS_0^1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{S_0^0 S_0^1 (1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} uS_0^1 & -dS_0^1 \\ -(1+r)S_0^0 & (1+r)S_0^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(dS_0^1) \\ h(uS_0^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{uh(dS_0^1) - dh(uS_0^1)}{S_0^0(1+r)(u-d)} \\ \frac{h(uS_0^1) - h(dS_0^1)}{S_0^1(u-d)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur du portefeuille de réplification en  $t = 0$  et donc le prix de l'option est donné par

$$V_0 = \phi^0 S_0^0 + \phi^1 S_0^1 = \frac{uh(dS_0^1) - dh(uS_0^1)}{(1+r)(u-d)} + \frac{h(uS_0^1) - h(dS_0^1)}{(u-d)} = \frac{qh(uS_0^1) + (1-q)h(dS_0^1)}{1+r},$$

où  $q := \frac{1+r-d}{u-d} \in (0, 1)$ . Autrement dit, on peut écrire le prix de l'option comme l'espérance actualisée de son pay-off sous une probabilité  $\mathbb{Q} = \{q, 1-q\}$  qui n'est pas directement liée à la probabilité

historique  $\mathbb{P} = \{p, 1 - p\}$ . Cette probabilité s'appelle la *probabilité risque-neutre* car sous cette probabilité les prix des actifs risqués sont donnés par les espérances de leurs pay-offs alors que dans le monde réel les investisseurs demandent une prime additionnelle pour compenser leurs risques.

La méthode financière de valorisation par replication est fondamentalement différente de la valorisation des polices en assurance. Supposons qu'une compagnie d'assurance (disons, automobile pour fixer les idées) a vendu des polices à  $N$  clients, dont les risques sont supposés identiquement distribués. Le paiement au  $n$ -ième assuré à la fin de l'année sera noté  $S^n$ . Puisque les accidents de circulation des différents assurés sont des événements indépendants, on peut supposer que les variables  $(S^1, \dots, S^N)$  sont i.i.d. Soit  $m = \mathbb{E}[S^1]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}[S^1]$ . Alors, par le TCL, lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \sum_{n=1}^N \left( -S^n + m - \frac{x\sigma}{\sqrt{N}} \right) \leq 0 \right] \rightarrow N(x),$$

où  $N(x)$  est la fonction de repartition de la loi normale centrée réduite. Autrement dit, pour assurer, asymptotiquement pour un grand nombre de polices, la solvabilité de la firme avec probabilité  $\alpha$  à la fin de l'année, il faut choisir une prime de chaque police égale à

$$\mathbb{E}[S^1] - \frac{N^{-1}(\alpha)\sigma}{\sqrt{N}}.$$

C'est-à-dire qu'à une petite correction près la prime d'une police d'assurance est égale à l'espérance *sous la probabilité historique* du flux terminal. Ceci s'explique par le fait qu'en assurance on ne cherche pas à annuler le risque de chaque police, et la solvabilité de la compagnie est garantie par la compensation des risques d'un grand nombre d'assureurs indépendants. En finance, cette logique ne fonctionne pas, car même si on vend un grand nombre d'options, elles seront toutes affectées par le risque du marché, qui ne peut pas être complètement diversifié. Par conséquent, on essaie d'annuler le risque de chaque option dans chaque scénario de marché avec un portefeuille de couverture.

Le fonctionnement des CDOs avant la crise des subprimes était fondé sur la logique d'assurance : on estimait que la diversification des risques de non-remboursement des différents emprunteurs réduit quasiment à zéro le risque de ces produits. Or en réalité il n'en est rien : les emprunteurs immobiliers sont loin d'être indépendants car ils sont tous sensibles au risque systémique de retournement du marché immobilier.

## Chapitre 3

# La formule de Black et Scholes

- Le modèle de Black-Scholes-Samuelson (mouvement brownien géométrique) pour le cours d'un actif. Volatilité et espérance de rendement du prix dans ce modèle.
- Volatilité et espérance de rendement d'un processus de prix arbitraire ; calcul à l'aide de la formule d'Itô.
- Dynamique d'un portefeuille autofinçant avec un seul actif risqué ; notion du levier financier ; actualisation.
- Stratégie de réplication d'une option européenne dans le modèle de Black-Scholes. EDP de Black-Scholes. Couverture en delta.
- Evaluation des prix des options européennes par espérance risque-neutre. Formule de Black-Scholes.
- Rôle, expression et propriétés des sensibilités (grecques tels que Delta, Vega, Gamma, Rho, Theta) des options Call et Put dans le modèle de Black-Scholes.
- Robustesse de la formule de Black-Scholes.
- Volatilité implicite : définition, algorithme de calcul, phénomène de smile de volatilité implicite.

### 3.1 Mouvement brownien géométrique

Soit  $(W_t)$  un mouvement brownien standard. Le modèle de Black-Scholes-Samuelson pour le prix d'un actif risqué s'écrit

$$S_t = S_0 e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}. \quad (3.1)$$

On suppose par ailleurs qu'il existe un actif sans risque dont le prix à l'instant  $t$  est  $S_t^0 = e^{rt}$ . Pour terminer la description de notre marché, nous supposons également qu'il est possible d'acheter ou vendre l'un ou l'autre actif sans coût de transaction ni restriction sur le volume, et que sur le marché il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

Pour comprendre l'origine du terme  $\frac{\sigma^2}{2}t$  dans l'exponentielle, calculons l'espérance et la variance du rendement de l'actif risqué entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  :

$$R_{t_i} = \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} \Rightarrow \mathbb{E}[R_{t_i}] = e^{b\Delta t_i} - 1 = b\Delta t_i + O(\Delta t_i^2),$$

$$\text{Var}[R_{t_i}] = e^{2b\Delta t_i}(e^{\sigma^2\Delta t_i} - 1) = \sigma^2\Delta t_i + O(\Delta t_i^2).$$

La *volatilité* d'un actif est traditionnellement définie comme l'écart type des rendements. Comme le taux d'intérêt, la volatilité doit être rapportée à une période de temps : on parle de la volatilité journalière, mensuelle, annualisée etc. Dans ce cours, on utilisera exclusivement la volatilité annualisée, qui est donc donnée par

$$\sqrt{\frac{\text{Var}[R_{t_i}]}{\Delta t_i}}$$

On voit alors que dans l'écriture (3.1),  $\sigma$  représente la volatilité annualisée de l'actif sur une petite période. Dans la suite, on dira simplement que  $\sigma$  est la volatilité du prix dans le modèle de Black-Scholes. Le coefficient  $b$ , quant à lui, représente l'espérance annualisée du rendement.

Une autre façon d'écrire la formule (3.1) est sous forme d'une équation différentielle stochastique (l'EDS classique de Black-Scholes-Samuelson)

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t. \quad (3.2)$$

Le lien entre les deux formules peut être établi par la formule d'Itô.

Dans le modèle de Black-Scholes, la volatilité apparaît donc comme le coefficient devant le brownien dans l'écriture (3.2) pour le processus de prix.

Par analogie avec le modèle Black-Scholes, lorsque le processus de prix d'un actif peut être écrit sous la forme (3.2), on appellera le coefficient devant le brownien sa volatilité, et le coefficient devant  $dt$  espérance du rendement.

Par exemple, supposons que le prix d'une option est donnée par une fonction connue du prix du sous-jacent vérifiant le modèle de Black-Scholes :  $P_t = u(t, S_t)$ . Alors, par la formule d'Itô on peut écrire

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t} + bS_t \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}}{u(t, S_t)} dt + \frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}}{u(t, S_t)} dW_t$$

On voit alors que la volatilité du prix de l'option est donnée par

$$\frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}}{u(t, S_t)}.$$

### 3.2 Dynamique d'un portefeuille autofinçant

On considère un portefeuille financier contenant une certaine quantité de l'actif sans risque et une certaine quantité de l'actif risqué. On suppose que le gérant de ce portefeuille peut modifier les positions en vendant l'actif sans risque pour acheter l'actif risqué et vice versa, mais à aucun

moment l'argent n'est rajouté ni retiré du portefeuille. Un tel portefeuille s'appelle un portefeuille autofinçant. Soit  $\delta_t$  le nombre d'unités de l'actif risqué et  $X_t$  la valeur du portefeuille à l'instant  $t$ . En supposant dans un premier temps que le portefeuille est reajusté aux dates discrètes  $t_1, \dots, t_n$ , son évolution entre deux dates de réajustement consécutives est

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \delta_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + (X_{t_i} - \delta_{t_i}S_{t_i}) \frac{S_{t_{i+1}}^0 - S_{t_i}^0}{S_{t_i}^0}$$

**Actualisation** Ces expressions et le traitement qui va suivre se simplifient en choisissant l'actif sans risque comme *numéraire*, c'est-à-dire en exprimant la valeur du portefeuille, et celle de l'actif risqué non pas en euros mais en nombre d'unités de l'actif sans risque :

$$\tilde{X}_t = \frac{X_t}{S_t^0}, \quad \tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}.$$

On a alors (à vérifier en exercice)

$$\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i} = \delta_{t_i}(\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i}).$$

En faisant tendre le pas de reajustement de portefeuille vers 0, on obtient l'expression équivalente en temps continu qui fait intervenir une intégrale stochastique :

$$d\tilde{X}_t = \delta_t d\tilde{S}_t.$$

En revenant aux quantités non-actualisées, on a alors

**L'équation du portefeuille autofinçant en temps continu exprimée en termes du nombre d'unités de l'actif risqué**

$$dX_t = \delta_t dS_t + (X_t - \delta_t S_t) r dt.$$

Le trading continu est forcément une abstraction, puisqu'en pratique les seules stratégies possibles sont celles où le portefeuille est reajusté un nombre fini de fois. Cependant cette abstraction est assez proche de la réalité pour les actifs suffisamment liquides et permet d'obtenir des résultats importants. Par la suite, nous allons quantifier l'effet de discrétisation des stratégies de trading sur les résultats obtenus.

Lorsque le prix du portefeuille  $X_t$  est tout le temps positif, on peut exprimer la stratégie d'investissement de manière équivalente en termes de la proportion (ou poids) de la richesse totale investié en l'actif risqué, notée par  $\omega_t$ . Cette proportion est reliée au nombre d'unités à acheter via  $\omega_t = \frac{\delta_t S_t}{X_t}$ .

**En termes de la proportion investie en actif risqué, l'équation du portefeuille autofinçant devient**

$$\frac{dX_t}{X_t} = (1 - \omega_t) r dt + \omega_t \frac{dS_t}{S_t} = (\omega_t b + (1 - \omega_t) r) dt + \omega_t \sigma dW_t.$$

On voit que la volatilité d'un portefeuille qui investit la proportion  $\omega_t$  dans l'actif risqué est égale à  $\omega_t \sigma$ , et que son espérance de rendement en excès du rendement de l'actif sans risque est égale à

$\omega_t(b - r)$ . Dans ce portefeuille, le montant investi en l'actif sans risque est donné par  $X_t(1 - \omega_t)$ , c'est-à-dire, si  $\omega_t > 1$ , la stratégie consiste à emprunter pour investir un montant supérieur à la valeur du portefeuille en l'actif risqué. Dans ce cas, on dit que le portefeuille comporte un levier. Le levier augmente à la fois l'espérance du rendement et le risque (volatilité) du portefeuille.

### 3.3 Construction du portefeuille de réplication

On souhaite répliquer une option européenne (type call ou put) de pay-off à l'échéance  $T$  donné par  $g(S_T)$ . Si on arrive à construire un portefeuille autofinçant tel que  $X_T = g(S_T)$ , alors, par l'absence d'arbitrage, la valeur (l'unique prix qui ne génère pas d'opportunité d'arbitrage) de l'option en  $t = 0$  doit être égale à la valeur du portefeuille de réplication, donc à  $X_0$ .

Soit  $v(t, S) : [0, T] \times (0, \infty)$  une fonction du temps et de la valeur du sous-jacent appartenant à la classe  $C^{1,2}$ . Nous allons identifier les conditions que cette fonction doit vérifier pour qu'elle représente la valeur de l'option, mais dans un premier temps, cherchons un portefeuille autofinçant qui réplique cette fonction, c'est-à-dire qu'il vérifie  $X_t = v(t, S_t)$ .

Commençons par analyser l'évolution de  $v(t, S_t)$  entre 0 et  $T$ . La formule d'Itô donne

$$v(T, S_T) = v(0, S_0) + \int_0^T \left\{ \frac{\partial v}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \right\} dt + \int_0^T \frac{\partial v}{\partial S} dS_t.$$

Pour que cette valeur puisse être répliquée par un portefeuille autofinçant, il faut que sa dynamique corresponde à la dynamique du portefeuille autofinçant

$$X_T = X_0 + \int_0^T \delta_t dS_t + \int_0^T (X_t - \delta_t S_t) r dt.$$

Il faut donc faire disparaître les termes en  $dt$ . Pour cela supposons que la fonction  $v$  est une solution sur  $[0, T] \times (0, \infty)$  de l'EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r \left( v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right). \quad (3.3)$$

Dans ce cas,

$$v(T, S_T) = v(0, S_0) + \int_0^T \frac{\partial v}{\partial S} dS_t + \int_0^T \left( v - S_t \frac{\partial v}{\partial S} \right) r dt,$$

et en choisissant

$$\delta_{t_i} = \frac{\partial v}{\partial S}(t_i, S_{t_i}), \quad X_0 = v(0, S_0),$$

on a que

$$X_T = v(T, S_T).$$

Nous avons donc identifié un portefeuille autofinçant, qui réplique une fonction arbitraire du temps et du sous-jacent, qui vérifie l'EDP (3.3). Mais nous avons le droit également de choisir la condition terminale pour l'EDP. Choisissons alors le pay-off de l'option comme condition terminale :

$$v(T, S_T) = g(S_T).$$



Dans ce cas,  $X_T = g(S_T)$  : nous avons identifié le portefeuille autofinçant qui réplique le pay-off de l'option. Cela implique par l'absence d'arbitrage que la valeur de l'option à toute date doit nécessairement être égale à la valeur du portefeuille de réplication et donc à  $v(t, S_t)$ .

Avec ce raisonnement nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 4** (EDP de Black-Scholes et portefeuille de réplication). *Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à la date  $t$  d'une option européenne de pay-off  $g(S_T)$  à la date  $T$  est donné par  $v(t, S_t)$ , où la fonction  $v$  est la solution sur  $[0, T] \times (0, \infty)$  de l'EDP*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r \left( v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right), \quad v(T, S) = g(S). \quad (3.4)$$

*Cette option peut être répliquée par un portefeuille autofinçant de valeur initiale  $X_0 = v(0, S_0)$ , et qui contient à toute date  $t$ ,  $\frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$  unités de l'actif risqué.*

Pour répliquer une option européenne dans le modèle de Black-Scholes, on peut donc utiliser la procédure suivante :

1. Calculer la fonction de prix  $v(t, S)$  de l'option en résolvant l'équation (3.4).
2. Calculer la dérivée  $\frac{\partial v}{\partial S}$  pour obtenir le ratio de couverture.

Cette procédure marche si l'EDP (3.4) admet une et unique solution. Le résultat suivant précise ce point et donne un moyen pour calculer la solution.

**Théorème 5.** *Soit  $g$  une fonction à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe  $p$  tel que  $|g(x)| \leq C(1 + |x|^p)$  pour tout  $x$ . Alors l'EDP (3.4) admet l'unique solution dans la classe de fonctions à croissance polynomiale, appartenant à  $C^0([0, T] \times (0, \infty)) \cap C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty))$  donnée par*

$$v(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} g \left( S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \right) \right]$$

*Démonstration.* Il est immédiat de prouver, en utilisant le théorème de convergence dominée, que la fonction  $v$  est à croissance polynomiale et appartient à  $C^0([0, T] \times (0, \infty)) \cap C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty))$ . Montrons que cette fonction vérifie bien l'EDP (3.4). Soit

$$\hat{S}_u = S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t) + \sigma W_{u-t}}, \quad u \geq t$$

et  $\tau := \inf\{u > t : |\ln(\hat{S}_u/S)| > 1\}$ . On a :

$$v(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(\tau \wedge h - t)} v(\tau \wedge h, \hat{S}_{\tau \wedge h}) \right]$$

pour tout  $h > t$ . En appliquant la formule d'Itô, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E} \left[ \int_t^{\tau \wedge h} e^{-ru} \left\{ -rv + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{S}_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + r \hat{S}_u \frac{\partial v}{\partial S} \right\} du + \int_t^{\tau \wedge h} e^{-ru} \frac{\partial v}{\partial S} \sigma \hat{S}_u dW_u \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_t^{\tau \wedge h} e^{-ru} \left\{ -rv + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{S}_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + r \hat{S}_u \frac{\partial v}{\partial S} \right\} du \right]. \end{aligned}$$

Il reste alors à diviser l'espérance par  $h - t$  et passer à la limite  $h \downarrow t$ , en appliquant le théorème de convergence dominée.

Montrons maintenant l'unicité de solution dans la classe des fonctions à croissance polynomiale. Soit  $\tau_n := \inf\{u > t : |\ln(\hat{S}_u/S)| > n\}$  et soit  $v$  une solution de l'EDP (3.4). Alors la formule d'Itô implique que

$$e^{-r(T \wedge \tau_n)} v(T \wedge \tau_n, \hat{S}_{T \wedge \tau_n}) = e^{-rt} v(t, S) + \int_t^{T \wedge \tau_n} e^{-rt} \frac{\partial v}{\partial S}(u, \hat{S}_u) \sigma \hat{S}_u dW_u.$$

Puisque l'intégrand dans l'intégrale stochastique est bornée sur  $[t, T \wedge \tau_n]$ , on a

$$e^{-rt} v(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T \wedge \tau_n)} v(T \wedge \tau_n, \hat{S}_{T \wedge \tau_n}) \right].$$

Par continuité,

$$e^{-r(T \wedge \tau_n)} v(T \wedge \tau_n, \hat{S}_{T \wedge \tau_n}) \rightarrow e^{-rT} v(T, \hat{S}_T) = e^{-rT} g(\hat{S}_T)$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Pour passer à la limite sous l'espérance on applique le théorème de convergence dominée en utilisant la croissance polynomiale de  $v$  et le fait que le supremum du mouvement sur  $[t, T]$  admet tous les moments exponentiels. □

### 3.4 La formule de Black et Scholes

**Théorème 6** (Formule de Black et Scholes). *Le prix d'une option call européen de pay-off  $g(S) = (S - K)^+$  dans le modèle de Black-Scholes est donné par*

$$v(t, S) := C_{BS}(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

où

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{S}{Ke^{-r(T-t)}} \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Le ratio de couverture (delta) est donné par

$$\Delta_{BS}(t, S) = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) = N(d_1).$$

*Démonstration.* Par Théorème (5),

$$C_{BS}(t, S) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} \left( S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} - K \right)^+ \right] = P_1 - P_2$$

avec  $P_1 = \mathbb{E} \left[ S e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_{T-t}} \mathbf{1}_{S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K} \right]$

$$P_2 = K e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K} \right] = K e^{-r(T-t)} \mathbb{P} \left[ S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K \right].$$

On montre alors facilement que

$$P_2 = K e^{-r(T-t)} N(d_2).$$

Pour  $P_1$ , on a

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} \geq K} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{S e^{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} \geq K} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = SN(d_1). \end{aligned}$$

Pour calculer le ratio de couverture, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée pour dériver l'expression du prix sous le signe de l'espérance (il est également possible de dériver directement la formule de Black et Scholes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) &= \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S} \left( S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} - K \right)^+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_{T-t}} \mathbf{1}_{S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K} \right] = N(d_1). \end{aligned}$$

□

En utilisant la parité call-put, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 1.** *Le prix d'une option put européen de pay-off  $g(S) = (K - S)^+$  dans le modèle de Black-Scholes est donné par*

$$v(t, S) := P_{BS}(t, S) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - SN(-d_1).$$

*Le ratio de couverture (delta du put) est donné par*

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t, S) = N(d_1) - 1.$$

Dans le modèle de Black et Scholes, les calls sont donc croissants et les puts décroissants par rapport au prix du sous-jacent.

### 3.5 Les grecques

Pour comprendre le comportement des options en fonction de différents paramètres du modèle, on calcule les sensibilités du prix Black-Scholes par rapport à ces paramètres.

- Le *delta* est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle de l'actif sous-jacent :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} = N(d_1), \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial S} = N(d_1) - 1.}$$

C'est de loin le facteur de risque le plus important affectant le prix d'une option.

- Le *gamma* est défini comme la deuxième dérivée du prix ou bien la dérivée première du delta :

$$\boxed{\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} N(d_1) = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{où } n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = N'(x).}$$

Il a donc la double interprétation de la sensibilité du prix par rapport aux grandes variations et de la vitesse du changement de delta. Puisque le gamma est toujours positif, les prix des calls (et des puts) sont convexes en  $S$ . Le gamma d'une option est grand lorsque l'option est proche de la monnaie et / ou proche de l'échéance.

- Le *vega* est la sensibilité par rapport à la volatilité :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{T-t}.$$

Les prix des calls et des puts sont donc croissants par rapport à la volatilité. Le vega est plus grand à la monnaie mais décroît pour les options qui sont proches de l'échéance. Un portefeuille de  $n$  options de prix  $C_1, \dots, C_n$  contenant  $w_i$  unités de  $i$ -ème option est gamma-neutre (respectivement, vega-neutre) si

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial S^2} = 0 \quad \text{respectivement} \quad \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial C_i}{\partial \sigma} = 0.$$

Dans le modèle de Black-Scholes, *si toutes les options ont la même échéance*, un portefeuille est gamma-neutre si et seulement s'il est vega-neutre.

- Le *rho* est la sensibilité par rapport au taux d'intérêt :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) > 0, \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2) < 0.}$$

Le call est donc croissant et le put décroissant par rapport au taux d'intérêt.

- Le *theta* mesure la sensibilité par rapport au temps :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) < 0 \\ \frac{\partial P_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) \end{aligned}}$$

Le theta du call est toujours négatif, mais celui du put peut être négatif ou positif, en fonction des paramètres. Pour les puts proches de la monnaie / proches de l'échéance le premier terme va dominer, donnant un theta négatif, mais pour les puts dans la monnaie c'est le deuxième terme qui risque de l'emporter et le theta sera positif.

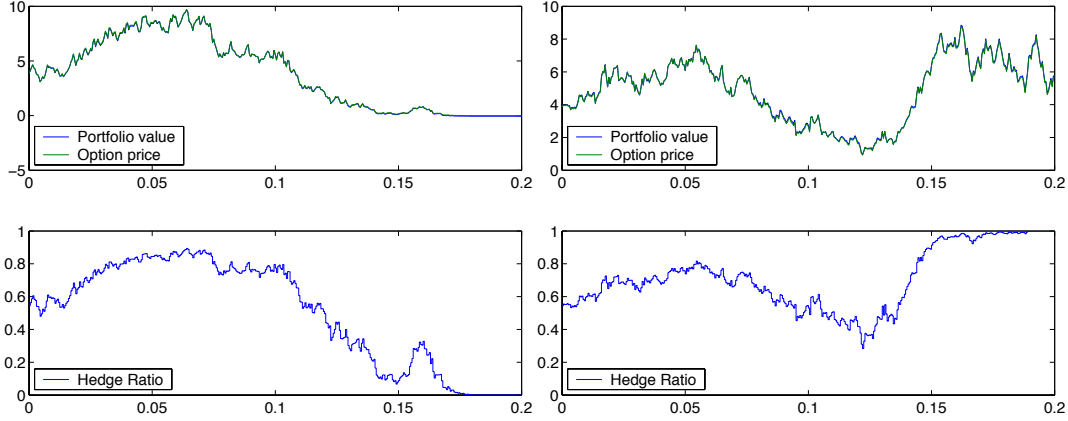


FIGURE 3.1 – Rebalancement continu du portefeuille de couverture (8 fois par jour). Gauche : P&L final = -0.05. Droite : P&L final = 0.08.

### 3.6 Discrétisation et couverture en gamma

Dans le modèle de Black-Scholes, pour que l'option soit complètement répliquée, le portefeuille de couverture doit être réajusté en continu. En pratique, il est bien entendu réajusté un nombre fini de fois, à des dates discrètes, ce qui conduit à une erreur de couverture (erreur de discrétisation). Figure 3.1 montre deux exemples d'évolution de portefeuille de couverture et de l'option qu'on cherche à répliquer dans le modèle de Black-Scholes avec rebalancement très fréquent (8 fois par jour) du portefeuille de couverture. De façon générale, à la fin de chaque trajectoire, le delta est égale soit à 0 si l'option termine hors de la monnaie soit à 1 si l'option termine dans la monnaie. Figure 3.2 montre l'effet d'une fréquence de rebalancement moins élevée : à gauche, le portefeuille est recalculé une fois par jour et à droite la couverture reste statique pendant toute la période (2 mois), ce qui conduit à une grande erreur de réplcation.

Pour quantifier l'erreur de discrétisation, écrivons la valeur de la différence entre la valeur actualisée d'une option européenne et le portefeuille de couverture correspondant. Avec un développement en série de Taylor d'ordre 1 en  $t$  et d'ordre 2 en  $\tilde{S}$ , pour  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) &= \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \{ \tilde{v}(t_i, \tilde{S}_{t_i}) - \tilde{v}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \} \\
&\approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta t_i + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta \tilde{S}_{t_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta \tilde{S}_{t_i}^2 \right\} \\
&\approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \Delta t_i + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S} \Delta \tilde{S}_{t_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 \Delta t_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i) \right\}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

En utilisant l'EDP de Black-Scholes et la forme explicite du portefeuille de réplcation, on obtient

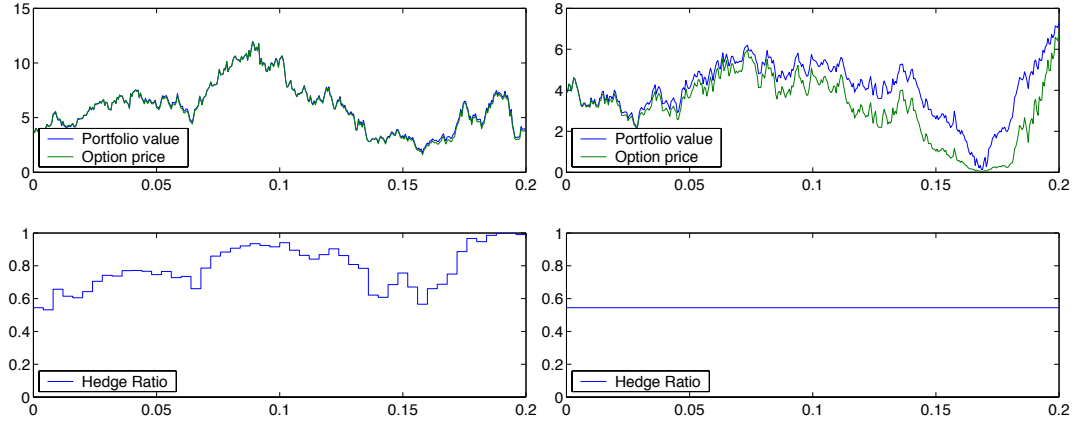


FIGURE 3.2 – Gauche : rebalancement journalier, P&L final = 0.18. Droite : couverture statique en delta, P&L final = 0.44.

le terme principal de l'erreur de couverture :

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) - \tilde{X}_T \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

ou bien, avec les quantités non actualisées,

$$v(T, S_T) - X_T \approx \frac{e^{rT}}{2} \sum_{i=1}^n e^{-rt_{i-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S_{t_{i-1}}^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

L'accroissement  $\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i$  est d'espérance nulle et de variance

$$\text{Var} [\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i] = 2\Delta t_i^2.$$

En divisant chaque accroissement par  $\sqrt{2\Delta t_i}$ , nous obtenons donc des accroissements i.i.d., centrés et de variance  $\Delta t_i$ . Par un théorème de limite centrale fonctionnel (c'est-à-dire qui permet d'obtenir la convergence non pas d'une suite de variables à une gaussienne mais d'une suite de processus vers le mouvement brownien), on obtient alors que

$$\sum_{t_i \leq t} \frac{1}{\sqrt{2\Delta t_i}} (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

en tant qu'un processus paramétré part  $t$ , converge en loi vers un mouvement brownien standard  $W^*$  indépendant de  $W$ , lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. On peut donc écrire de manière informelle, en supposant que le pas de discrétisation est constant et égal à  $\Delta t$ ,

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) - \tilde{X}_T \approx \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_t^2 \sigma_t^2 dW_t^*,$$

ou bien

$$v(T, S_T) - X_T \approx \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S_t^2 \sigma_t^2 dW_t^*. \quad (3.6)$$

L'erreur de couverture due à la discrétisation de la stratégie est donc proportionnelle au gamma de l'option et à la racine du pas de temps. Elle sera plus importante dans lorsque le gamma est élevé, c'est-à-dire, pour les options proches de la monnaie et/ou de l'échéance.

Pour réduire l'erreur de couverture, on peut soit augmenter la fréquence de réajustement, ce qui engendre des coûts de transaction, soit diminuer le gamma, en rajoutant au portefeuille des instruments de couverture adaptés (en général, des options liquides). Ceci n'est pas réaliste pour la couverture d'une seule option mais peut être tout à fait envisageable lorsqu'on souhaite couvrir un portefeuille contenant beaucoup d'options sur le même sous-jacent. Si la valeur du portefeuille d'options à couvrir est notée par  $v(t, S)$  et celle de l'actif de couverture par  $v_0(t, S)$ , pour que le portefeuille global soit gamma-neutre, il faut que la quantité de l'actif  $v_0$  soit égale à

$$\gamma_t = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}}{\frac{\partial^2 v_0}{\partial S^2}}.$$

On a donc intérêt à choisir l'actif de couverture dont le gamma est élevé.

### 3.7 Robustesse de la formule de Black et Scholes

La formule de Black-Scholes est souvent utilisée dans le marché même pour les actifs dont la volatilité n'est pas constante ni même déterministe. Cette pratique est partiellement justifiée par la propriété connue sous le nom de "robustesse de la formule de Black-Scholes" : même si la vraie volatilité du sous-jacent est stochastique, la formule de Black-Scholes peut être utilisé pour calculer les bornes supérieures / inférieures du prix, pourvu que la volatilité constante utilisée majore / minore la vraie volatilité.

Supposons que le prix d'action suit

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t,$$

où  $\sigma_t$  est un processus stochastique, et que l'agent calcule son portefeuille de couverture en utilisant la formule Black-Scholes avec volatilité constante  $\Sigma$ . L'évolution du portefeuille de l'agent est

$$d\tilde{X}_t = \Delta_{BS}(t, S_t) d\tilde{S}_t, \quad \tilde{X}_0 = \tilde{C}_{BS}(0, \tilde{S}_0).$$

L'erreur finale actualisée de couverture est donnée par la différence entre  $V_T$  et le payoff de l'option :

$$\tilde{\varepsilon}_T = \tilde{X}_T - \tilde{g}(\tilde{S}_T) = \tilde{X}_T - \tilde{C}_{BS}(T, \tilde{S}_T).$$

En appliquant la formule d'Itô on a alors

$$d\tilde{C}_{BS}(t, S_t) = \left( \frac{\partial \tilde{C}_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 \tilde{S}_t^2 \right) dt + \Delta_{BS}(t, S_t) d\tilde{S}_t,$$

mais  $\tilde{C}_{BS}(t, S)$  en tant qu'une fonction satisfait l'EDP de Black-Scholes :

$$\frac{\partial \tilde{C}_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \tilde{S}^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} = 0.$$

En rassemblant les trois équations, on trouve

$$\tilde{\varepsilon}_T = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma_t^2) \tilde{S}_t^2 dt.$$

ou bien

$$\varepsilon_T = X_T - g(S_T) = \frac{1}{2} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma_t^2) S_t^2 dt.$$

Si  $\Sigma \geq \sigma_t$  p.s., nous avons  $X_T \geq g(S_T)$  p.s. : le portefeuille de couverture Black-Scholes domine le prix de l'option et donc, le prix Black-Scholes domine le vrai prix. Dans ce sens précis, la formule de Black-Scholes est robuste aux misspécifications de la volatilité.

### 3.8 Volatilité implicite

Dans le modèle de Black et Scholes l'unique paramètre inobservable est la volatilité. La fonction,  $\sigma \mapsto C_{BS}(\sigma)$  qui à une valeur de volatilité associe le prix Black-Scholes correspondant, vérifie

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} C_{BS}(\sigma) = (S - K e^{-r(T-t)})^+ \quad \lim_{\sigma \uparrow \infty} C_{BS}(\sigma) = S \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_1) \sqrt{T-t} > 0. \quad (3.8)$$

Ceci implique que l'équation  $C_{BS}(\sigma) = C$  a une unique solution pour toute valeur de  $C$  vérifiant les contraintes d'arbitrage

$$(S - K e^{-r(T-t)})^+ < C < S$$

Cette solution peut facilement être calculée en utilisant l'algorithme de bisection pour la fonction  $x \in (0, 1) \mapsto C_{BS}\left(\frac{x}{1-x}\right)$  (le changement de variable permet de se ramener à un intervalle borné).

Le choix du nombre d'itérations  $N$  dépend de la précision souhaitée : par exemple,  $N = 20$  donnera une précision de l'ordre de  $10^{-6}$ . La convergence peut être accélérée par l'algorithme de Newton

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C - C_{BS}(\sigma_n)}{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)},$$

pour lequel 3–4 itérations sont normalement suffisantes. Cependant, lorsque  $C$  est trop proche des bornes d'arbitrage, la dérivée  $\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)$  devient trop petite, ce qui peut conduire à des instabilités numériques. Dans ce cas il est préférable d'utiliser la méthode de bisection.

La solution  $I(C)$  de l'équation  $C_{BS}(\sigma) = C$ , où  $C$  est le prix d'une option européenne observé sur le marché s'appelle la *volatilité implicite* de cette option.



---

**Algorithm 1**  $\sigma = \text{Volatilité Implicite}(C)$ 


---

```

 $x_0 = 0$ 
 $y_0 = 1$ 
for  $i = 1 \rightarrow N$  do
   $z_i := \frac{1}{2}(x_{i-1} + y_{i-1})$ 
  if  $C > C_{BS}(\frac{z_i}{1-z_i})$  then
     $x_i := z_i$ 
     $y_i := y_{i-1}$ 
  else
     $x_i := x_{i-1}$ 
     $y_i := z_i$ 
  end if
end for
 $z := \frac{x_N + y_N}{2}$ 
 $\sigma := \frac{z}{1-z}$ 

```

---

Le modèle de Black-Scholes implique que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique (écart type des rendements annualisé) du sous-jacent. Cependant, lorsqu'on calcule  $I$  à partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que

- La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité du sous-jacent.
- Les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

Le graphique gauche du fig. 3.3 trace les volatilités implicites des options sur l'indice S&P 500 en fonction de leur strike et maturité observés le 23 janvier 2006. On constate que

- Pour presque tous les strikes, la volatilité implicite décroît en fonction de strike (phénomène de *skew*).
- Pour des très grands strikes on observe parfois une légère remontée de la volatilité implicite (phénomène du *smile*).
- Les phénomènes de smile et skew sont le plus prononcés pour les options de courte maturité; la courbe de volatilité implicite en fonction de strike s'aplatit pour les grandes maturités.

La différence entre la volatilité implicite et la volatilité historique du sous-jacent peut s'expliquer par le fait que la couverture d'une option est plus chère en réalité que dans le modèle de Black-Scholes, à cause, en particulier, des frais de transaction et de la nécessité de couvrir les sources de risque non pris en compte par ce modèle (e.g. le risque de volatilité). Le phénomène de skew est dû au fait que le modèle de Black-Scholes sous-estime la probabilité d'un krach boursier ou d'un grand mouvement de prix en général. Les traders corrigent cette probabilité en augmentant les volatilités implicites des options loin de la monnaie. Finalement, le smile peut être expliqué par les primes de liquidité qui sont plus élevées pour les options loin de la monnaie. Le graphique droit du fig. 3.3 montre que les volatilités implicites des options loin de la monnaie sont presque exclusivement expliquées par les prix Bid (d'achat) qui ont des primes plus élevées pour ces options à cause d'une offre moins importante.

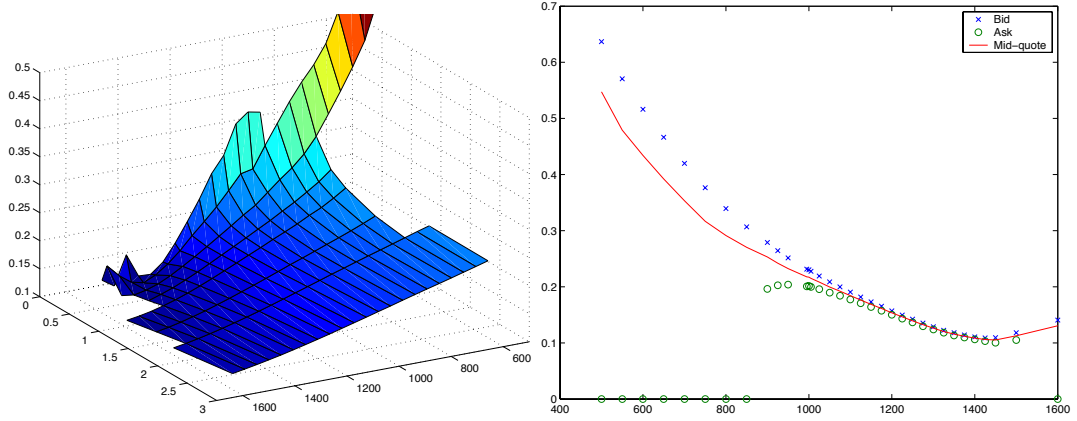


FIGURE 3.3 – Gauche : volatilité implicite des options sur S&P 500 en fonction de strikes et maturités. Droite : volatilités implicites pour une maturité donnée, calculées à partir des prix *bid* et *ask*.

## Annexe : résumé des résultats du calcul stochastique utilisés dans ce chapitre

**Définition 2.** Soit  $W$  un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On dit que  $W$  est un mouvement brownien standard si

1.  $W_0 = 0$  et les trajectoires de  $W$  sont continues p.s.
2. Les accroissements de  $W$  sont indépendants : pour toute suite  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$  sont indépendants.
3. Pour tout  $t, s$  avec  $0 \leq s < t$ ,  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ .

**Intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien** Soit  $W$  un mouvement brownien par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$ , et  $\phi$  un processus mesurable  $\mathbb{F}$ -adapté tel que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \phi_t^2 dt \right] < \infty.$$

Alors l'intégrale stochastique  $\int_0^\infty \phi_t dW_t$  peut être définie comme l'unique limite dans  $L^2$  des intégrales des processus simples (constants par morceaux) qui approximent  $\phi$ . Cette intégrale vérifie

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \phi_t dW_t \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^\infty \phi_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \phi_t^2 dt \right].$$

De plus, on peut définir le processus stochastique

$$I_t \equiv \int_0^t \phi_s dW_s := \int_0^\infty \mathbf{1}_{s \leq t} \phi_s dW_s.$$

Ce processus est une martingale continue et vérifie

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \phi_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \phi_s^2 ds \right]. \quad (3.9)$$

pour tout  $t \geq 0$ . Si le processus  $\phi$  vérifie seulement

$$\int_0^\infty \phi_t^2 dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

on peut définir l'intégrale stochastique  $\int_0^t \phi_s dW_s$  par localisation, mais ce processus est seulement une martingale locale et ne vérifie pas nécessairement la relation (3.9).

**Processus d'Itô** On dit que  $X$  est un processus d'Itô s'il s'écrit sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dW_s \quad (3.10)$$

où  $\psi$  et  $\phi$  sont des processus mesurables  $\mathbb{F}$ -adaptés vérifiant

$$\int_0^\infty (|\psi_t| + \phi_t^2) dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

L'intégrale d'un processus  $\lambda$  par rapport à un processus d'Itô est définie par

$$\int_0^t \lambda_s dX_s := \int_0^t \lambda_s \psi_s ds + \int_0^t \lambda_s \phi_s dW_s$$

dès que les deux intégrales dans la partie droite de l'égalité sont bien définies.

**Proposition 1** (Formule d'Itô). *Soit  $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et  $W$  un mouvement brownien standard. Alors*

$$f(T, W_T) = f(0, 0) + \int_0^T \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t) \right) dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t) dW_t. \quad (3.11)$$

*Soit maintenant  $X$  un processus d'Itô à valeurs dans  $\mathbb{R}$  admettant la représentation (3.10). Alors*

$$f(T, X_T) = f(0, X_0) + \int_0^T \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right) \phi_t^2 dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t. \quad (3.12)$$

