

Chapitre 4

Volatilité locale et la formule de Dupire

- *Modèle à volatilité locale. Modèle CEV.*
- *Valorisation d'options dans les modèles à volatilité locale.*
- *EDP et formule de Dupire (en termes des prix d'options).*
- *Formule de Dupire en termes des volatilités implicites.*
- *Volatilité implicite dans la limite de très courte maturité.*
- *Paramétrisation SVI pour la volatilité implicite.*

4.1 Modèles à volatilité locale

Dans le chapitre précédent nous avons vu que le modèle de Black-Scholes à volatilité constante ne peut pas reproduire l'ensemble des prix d'options observés sur le marché pour un sous-jacent donné, car leur volatilité implicite varie en fonction du strike et de la maturité. Pour prendre en compte le smile du marché tout en restant dans le cadre markovien et complet (un seul facteur de risque) une solution naturelle est de modéliser la volatilité comme une fonction déterministe du temps et de la valeur du sous-jacent, ce qui signifie que la valeur du sous-jacent est la solution d'une équation différentielle stochastique.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad (4.1)$$

Dans la suite nous supposons toujours que l'équation (4.1) admet une unique solution forte. Par exemple, il suffit de supposer que $S\sigma(t, S)$ est Lipschitz en S et à croissance sous-linéaire, mais dans les exemples spécifiques on peut démontrer l'existence d'une solution forte sous des conditions moins fortes.

Par analogie avec le modèle de Black-Scholes on considère l'équation de pricing

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = rv(t, S) - rS \frac{\partial v}{\partial S}, \quad v(T, S) = g(S). \quad (4.2)$$

Sous des conditions assez faibles (e.g., σ Hölder continu en x et continu en t , $\sigma(t, x) \geq c > 0$ pour tout t, x et g continu - voir Friedman [2013]) on peut montrer que cette équation admet une solution $C^{1,2}$. Par le même argument d'autofinancement que dans le modèle Black-Scholes, on peut alors en déduire que le prix d'une option qui paie $g(S_T)$ à l'instant T vérifie (4.2) et le portefeuille autofinçant de couverture contient $\delta_t = \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$ actions. L'équation de pricing garde alors la même forme que dans le modèle de Black-Scholes mais on ne peut plus en déduire une formule explicite car la volatilité dépend maintenant du sous-jacent.

De même, par analogie au Théorème 5, on peut démontrer que l'unique solution de l'équation (4.2) dans la classe des fonctions régulières à croissance polynomiale s'écrit sous forme d'une espérance :

$$v(t, S) = E[e^{-\int_t^T r ds} g(\widehat{S}_T) | \widehat{S}_t = S], \quad (4.3)$$

où le processus \widehat{S} suit la dynamique modifiée

$$\frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t} = r dt + \sigma(t, \widehat{S}_t) dW_t.$$

4.2 Modèle CEV

Un exemple de modèle à volatilité locale bien étudié dans la littérature est donné par le modèle CEV (Constant Elasticity of Variance) de Cox [1996]. Dans ce modèle, la volatilité est une fonction puissance du niveau de sous-jacent :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \frac{\sigma_0}{S_t^{1-\alpha}} dW_t \quad (4.4)$$

Plaçons-nous sous la probabilité risque-neutre, et supposons dans un premier temps que le prix forward du sous-jacent $F_t = e^{r(T-t)} S_t$ suit le modèle CEV :

$$dF_t = \sigma_0 F_t^\alpha dW_t, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.5)$$

Le modèle de Black-Scholes et le modèle gaussien sont des cas limites de cette équation avec $\alpha = 1$ et $\alpha \rightarrow 0$ respectivement. La valeur 0 est une barrière *absorbante*, si $F_t = 0$ pour un t , $F_s \equiv 0$ pour tout $s \geq t$.

Volatilité implicite La forme de la volatilité implicite du modèle CEV est connue grâce à l'approximation asymptotique de Hagan and Woodward [1999] :

$$\sigma^{imp}(K, T) = \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}} \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{24} \left(\frac{F_0 - K}{F_m} \right)^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{24} \frac{\sigma_0^2 T}{F_m^{2-2\alpha}} + \dots \right\}. \quad (4.6)$$

avec $F_m = \frac{1}{2}(F_0 + K)$. Au premier ordre, on a donc $\sigma^{imp}(K, T) \approx \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}}$: la volatilité implicite a la même forme que la volatilité locale mais avec une pente à la monnaie 2 fois plus petite.

Cas général ($\mu \neq 0$) Soit $F_t^{(\mu)} := e^{\mu t} F_{\tau(t)}$, avec $\tau(t)$ un changement de temps déterministe à préciser. Alors

$$dF_t^{(\mu)} = \mu F_t^{(\mu)} dt + e^{\mu t} dF_{\tau(t)}.$$

On a par ailleurs

$$F_{\tau(t)} = \int_0^{\tau(t)} \sigma_0 F_s^\alpha dW_s = \int_0^t \sigma_0 F_{\tau(s)}^\alpha dW_{\tau(s)},$$

d'où

$$dF_{\tau(t)}^0 = \sigma_0 F_{\tau(t)}^\alpha \sqrt{\tau'(t)} dW_t = e^{-\alpha \mu t} \sqrt{\tau'(t)} \sigma_0 (F_t^{(\mu)}) dW_t.$$

Finalement, en choisissant τ avec $\tau'(t) = e^{2\mu(\alpha-1)t}$, c'est-à-dire,

$$\tau(t) = \frac{1 - e^{2\mu(1-\alpha)t}}{2\mu(1-\alpha)t}$$

on retrouve l'équation (4.4).

Complément technique sur le modèle CEV L'existence de solution de l'équation (4.5) peut être établi en reliant le processus F avec le processus de Bessel. Soit (B^1, \dots, B^n) un mouvement brownien standard en dimension n et $R_t^2 = \sum_{i=1}^n (B_t^i)^2$. Il est facile de voir que

$$d(R_t^2) = 2R_t dW_t + ndt \tag{4.7}$$

où W est un nouveau mouvement brownien. En posant $\rho_t = R_t^2$, on a donc

$$d\rho_t = 2\sqrt{|\rho_t|} dW_t + ndt \tag{4.8}$$

et, pour $n > 1$,

$$dR_t = dW_t + \frac{n-1}{2} \frac{dt}{R_t}.$$

On peut démontrer que l'équation (4.8) admet une solution forte pour des valeurs de n non entières, permettant de définir le processus de Bessel [Chesney et al., 2009] :

Définition 3. Soit $\delta \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$. L'unique solution forte de l'équation

$$\rho_t = x + \delta t + 2 \int_0^t \sqrt{\rho_s} dW_s$$

s'appelle le processus BESQ (Bessel squared) de dimension δ . Le processus $R_t = \sqrt{\rho_t}$ s'appelle le processus de Bessel de dimension δ .

Soit $\tau = \inf\{t : F_t = 0\}$ et posons $X_t = \frac{1}{\sigma_0(1-\alpha)} F_t^{1-\alpha}$. Par une application de la formule d'Itô, sur l'ensemble sur $\{t < \tau\}$,

$$dX_t = dW_t - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)X_t} dt,$$

ce qui donne le lien entre CEV et le processus de Bessel.

La contrainte $0 < \alpha \leq 1$ est imposée puisqu'on peut démontrer que pour $\alpha > 1$, (F_t) est une martingale locale stricte, c'est-à-dire, pas une vraie martingale, ce qui peut conduire, par exemple, à la violation de la parité Call-Put et d'autres inconvénients. Montrons que pour $0 < \alpha \leq 1$, l'équation (4.5) définit une vraie martingale de carré intégrable sur $[0, T]$ pour tout $T < \infty$. Pour cela il est suffisant de voir que

$$E\{[F]_T\} = E\left\{\sigma_0^2 \int_0^T F_t^{2\alpha} dt\right\} < \infty. \quad (4.9)$$

Soit $\tau_n = \inf\{t : F_t \geq n\}$. $F_{T \wedge \tau_n}$ est alors de carré intégrable, et on a, pour $0 < \alpha \leq 1$,

$$E[F_{\tau_n \wedge T}^2] = \sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt\right] \leq \sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} (1 + F_t^2) dt\right] \leq \sigma_0^2 E\left[\int_0^T (1 + F_{t \wedge \tau_n}^2) dt\right]$$

Par le lemme de Gronwall on a alors

$$\sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt\right] = E[F_{\tau_n \wedge T}^2] \leq \sigma_0^2 T e^{\sigma_0^2 T},$$

d'où (4.9) est déduit par convergence monotone.

4.3 Valorisation d'options dans les modèles à volatilité locale

Dans le modèle de volatilité locale, le prix d'une option européenne vérifie l'équation (4.2) qui n'admet pas de solution explicite. Cependant, cette équation n'a que deux dimensions : le temps et l'espace, et est donc facile à résoudre par un algorithme de discrétisation déterministe (méthode de différences finies). Pour commencer, introduisons une nouvelle variable $x = \log \frac{s}{s_0} + r(T-t)$ et une nouvelle fonction inconnue $u(t, x) = e^{r(T-t)} C(t, s_0 e^{x-r(T-t)})$. L'équation (4.2) devient alors

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, x) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \quad t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

où $\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, e^{x-r(T-t)})$. On discrétise cette équation sur un domaine borné rectangulaire $[0, T] \times [-A, A]$ avec une grille équidistante en temps $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = \frac{T}{N}$, $n = 0, 1, \dots, N$ et en espace $x_m = -A + m\Delta x$, $\Delta x = \frac{2A}{M}$, $m = 0, 1, \dots, M$. La solution approchée au point (t_n, x_m) sera notée $\hat{u}_{n,m}$. Pour $m = 1, \dots, M-1$, les dérivées en espace sont approchées par les différences centrées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t_n, x_m)}{\partial x} &\approx \frac{u(t_n, x_{m+1}) - u(t_n, x_{m-1})}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial x^2} &\approx \frac{u(t_n, x_{m+1}) - 2u(t_n, x_m) + u(t_n, x_{m-1}))}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Aux bords du domaine, pour $m = 0$ et $m = M$, on doit préciser les conditions aux limites. Prenons des conditions de type Dirichlet, c'est-à-dire $u(t, x) = g(t, x)$ pour $x = -A$ et $x = A$. Cela signifie

qu'au lieu de résoudre l'équation (4.10) on résout en effet une autre équation sur le domaine tronqué :

$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, x) \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right\}, \quad t \in [0, T], x \in (-A, A) \quad (4.11)$$

avec les conditions aux limites $\hat{u}(t, -A) = g(t, -A)$, $\hat{u}(t, A) = g(t, A)$, $t \in [0, T]$.

La dérivée en temps est approchée par la différence 'un pas en arrière' :

$$\frac{\partial u(t_n, x_m)}{\partial t} \approx \frac{u(t_n, x_m) - u(t_{n-1}, x_m)}{\Delta t}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

La condition terminale est donnée par le pay-off de l'option : $u(t_N, x_m) = \tilde{h}(x_m)$ pour $m = 0, \dots, M$, où $\tilde{h}(x) = h(s_0 e^x)$. En substituant ces approximations dans l'équation, on obtient une équation en différences pour $\hat{u}_{n,m}$:

$$\hat{u}_{n-1,m} = \hat{u}_{n,m} \left\{ 1 - \frac{\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t}{\Delta x^2} \right\} + \hat{u}_{n,m+1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \right) + \hat{u}_{n,m-1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (4.12)$$

avec les conditions aux bords $\hat{u}_{n,0} = g(t_n, x_0)$ et $\hat{u}_{n,M} = g(t_n, x_M)$ pour $n = 0, \dots, N$ et la condition terminale $\hat{u}_{N,m} = \tilde{h}(x_m)$ pour $m = 1, \dots, M-1$. Cette équation se résout en arrière, en commençant par la valeur terminale $n = N$ et en procédant jusqu'à $n = 0$. Le schéma donne $\hat{u}_{n-1,\cdot}$, explicitement en termes de $\hat{u}_{n,\cdot}$, et pour cette raison s'appelle *le schéma explicite*.

Pour éviter l'explosion des erreurs numériques, le schéma de discrétisation doit être *stable*. Cette propriété signifie que si la condition terminale est bornée par une constante C , la solution à toute date doit être bornée par la même constante. En regardant l'équation (4.12), on voit que ce schéma sera stable si tous les coefficients à droite sont positifs. Supposant que $\Delta x < 2$, cette propriété est vérifiée si la condition suivante dite condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est vérifiée pour tous $(t, x) \in [0, T] \times [-A, A]$:

$$\tilde{\sigma}^2(t_n, x_m) \Delta t < \Delta x^2.$$

On dit que le schéma explicite est *conditionnellement* stable : le pas de temps doit être suffisamment petit comparé au pas d'espace. En pratique, cela nécessite de choisir le pas de temps très petit et augmente le temps de calcul. Une autre possibilité est d'approcher la dérivée en temps par la différence 'un pas en avant' :

$$\frac{\partial u(t_n, x_m)}{\partial t} \approx \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m)}{\Delta t}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Cette approximation correspond au *schéma implicite* :

$$\hat{u}_{n,m} = \hat{u}_{n-1,m} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\sigma}^2(t_{n-1}, x_m) \Delta t}{\Delta x^2} \right\} - \hat{u}_{n-1,m+1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_{n-1}, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \right) - \hat{u}_{n-1,m-1} \frac{\tilde{\sigma}^2(t_{n-1}, x_m) \Delta t}{2\Delta x^2} \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right). \quad (4.13)$$

Dans ce schéma la fonction inconnue $\hat{u}_{n-1,\cdot}$ doit être calculée à partir de $\hat{u}_{n,\cdot}$ par inversion de matrice. Le schéma implicite est *inconditionnellement* stable.

Lorsque l'équation (4.11) admet une solution classique régulière, on peut montrer qu'à la fois le schéma explicite (sous la condition CFL) et le schéma implicite sont des schémas d'ordre 1 en temps et ordre 2 en espace, ce qui signifie que la différence entre la vraie solution et l'approximation vérifie

$$|\hat{u}(t_n, x_m) - \hat{u}_{n,m}| = O(\Delta t + \Delta x^2).$$

Conditions aux limites Le choix de la taille du domaine A et des conditions aux limites dépend de la fonction pay-off h et de la fonction de volatilité. Pour simplifier, supposons que la volatilité est bornée par une constante $\bar{\sigma}$ et que la fonction pay-off h est convexe. Alors par la robustesse de la formule de Black-Scholes, la fonction $u(t, x)$ admet les bornes suivantes pour tout t, x :

$$\tilde{h}(x) \leq u(t, x) \leq u^{\bar{\sigma}}(t, x),$$

où $u^{\bar{\sigma}}(t, x)$ est la solution de (4.10) avec volatilité constante $\bar{\sigma}$. D'un autre coté, la solution de l'équation tronquée \hat{u} admet la représentation probabiliste suivante :

$$\hat{u}(t, x) = \mathbb{E}[\tilde{h}(X_T^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau^{(t,x)} > T} + g(\tau^{(t,x)}, X_{\tau^{(t,x)}}^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau^{(t,x)} \leq T}],$$

où $X^{(t,x)}$ est le processus de diffusion vérifiant l'EDS

$$X_s^{(t,x)} = x - \frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(r, X_r^{(t,x)}) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{(t,x)}) dW_r, \quad s \geq t,$$

et $\tau^{(t,x)} = \inf\{s \geq t : X_s^{(t,x)} \notin [-A, A]\}$. Cela montre que $\hat{u}(t, x)$ est croissant en la condition aux bords. Comme par ailleurs

$$u(t, x) = \mathbb{E}[\tilde{h}(X_T^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau^{(t,x)} > T} + u(\tau^{(t,x)}, X_{\tau^{(t,x)}}^{(t,x)})\mathbf{1}_{\tau^{(t,x)} \leq T}],$$

la vraie solution se situe entre les bornes suivantes :

- $u(t, x)$ est bornée supérieurement par la solution à (4.11) avec condition aux bords $g(t, x) = u^{\bar{\sigma}}(t, x)$ (qui peut être calculée explicitement avec la formule de Black-Scholes).
- $u(t, x)$ est bornée inférieurement par la solution à (4.11) avec condition aux bords $g(t, x) = \tilde{h}(x)$.

Cela donne un algorithme pour choisir la taille du domaine A : augmenter A jusqu'à ce que les deux bornes deviennent suffisamment proches dans la région d'intérêt.

4.4 Equation et formule de Dupire

Rappelons que dans un modèle de volatilité locale le prix d'une option qui paie $g(S_T)$ à l'instant T satisfait

$$rv(t, S) = \frac{\partial v}{\partial t} + rS \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}, \quad v(T, S) = g(S). \quad (4.14)$$

Ceci est une équation *backward*, car on lui associe une condition terminale et l'équation se résout sur l'intervalle $[t, T]$ dans la direction $T \rightarrow t$. Cette équation est vérifiée par le prix de toute option

européenne, pas nécessairement call ou put. Elle permet de calculer le prix d'une option en fonction de la date d'observation t et de la valeur actuelle du sous-jacent S_t .

Notre objectif maintenant est de trouver une fonction de volatilité locale $\sigma(t, S)$ qui reproduit, à une date donnée, les prix observés des calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Equation (4.14) ne permet pas de reconstruire la volatilité locale en écrivant

$$\sigma^2(t, S) = \frac{rv - \frac{\partial v}{\partial t} - rS \frac{\partial v}{\partial S}}{\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}},$$

car à une date donnée, les valeurs de t et S sont fixées, et on ne peut pas calculer les dérivées partielles. La solution à ce problème a été donnée par Bruno Dupire [Dupire, 1994] qui a proposé une méthode pour calculer $\sigma(t, S)$ à partir d'une observation des prix d'options (pour tous strikes et maturités) à une date donnée. Plus précisément, il a démontré le résultat suivant.

Dans un modèle à volatilité locale, les prix de calls $C(t, S_t, T, K)$ vérifient l'équation forward (avec condition initiale), appelée equation de Dupire :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad C(t, S_t, T, K) = (S_t - K)^+$$

Cette équation s'applique uniquement aux prix des options Call, qui sont cette fois considérés comme fonctions du strike K et de la maturité T . Comme à une date donnée on peut observer les prix d'options de plusieurs strikes et maturités, cette équation peut être utilisée pour recalculer la fonction de volatilité $\sigma(\cdot, \cdot)$ à partir des prix d'options.

Dans un modèle de volatilité locale, la fonction de volatilité σ peut être retrouvée de façon unique avec la formule de Dupire :

$$\sigma(T, K) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \quad (4.15)$$

Le fait qu'on puisse retrouver de façon unique un processus markovien continu à partir des prix d'options européennes n'implique pas qu'il n'y a pas d'autres modèles (non markoviens ou non continus) qui évaluent les options européennes de la même façon. La connaissance des prix des options européennes détermine les distributions marginales du processus, mais la loi du processus ne se limite pas à ces distributions marginales.

Théorème 7. Soit $(S_t)_{t_0 \leq t}$ une solution de l'EDS

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad S_{t_0} = S_0.$$

Supposons que

1. S_t vérifie :

$$E \left[\int_{t_0}^T S_t^2 \sigma^2(t, S_t) dt \right] < \infty, \quad \forall T$$

2. Pour chaque $t > t_0$, la variable aléatoire S_t a une densité $p(t, x)$, continue sur $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$.

3. Le coefficient de diffusion $\sigma(t, x)$ est continu sur $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$.

Alors la fonction de prix d'une option call

$$C(T, K) = e^{-r(T-t_0)} E[(S_T - K)^+].$$

satisfait l'équation de Dupire

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad (T, K) \in [t_0, \infty) \times [0, \infty) \quad (4.16)$$

avec condition initiale $C(t_0, K) = (S_0 - K)^+$.

Preuve. La démonstration repose sur l'application de la formule d'Itô à la semimartingale $e^{-rt}(S_t - K)^+$. Puisque la fonction $f(x) = x^+$ n'est pas C^2 , la formule d'Itô classique ne s'applique pas directement. Une solution possible [El Karoui] consiste à utiliser la formule de Meyer-Itô pour les fonctions convexes [Protter, 1990]. Ici, nous adoptons une autre approche qui consiste à régulariser f en introduisant la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{(x + \varepsilon/2)^2}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + x \mathbf{1}_{x > \varepsilon/2}.$$

Il est clair que f_ε est 2 fois différentiable et différente de f seulement si $|x| < \varepsilon/2$. De plus, on a

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{x + \varepsilon/2}{\varepsilon} \mathbf{1}_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + \mathbf{1}_{x > \varepsilon/2}, \quad f''_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2}.$$

L'application de la formule d'Itô standard à $e^{-rt} f_\varepsilon(S_t - K)$ entre T et $T + \theta$ donne

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)} f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K) - e^{-rT} f_\varepsilon(S_T - K) &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f_\varepsilon(S_t - K) dt \\ &+ \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f'_\varepsilon(S_t - K) dS_t + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f''_\varepsilon(S_t - K) \sigma^2(t, S_t) S_t^2 dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

En prenant l'espérance de chaque terme dans (4.17) sous l'hypothèse 1 ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)} E[f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K)] - e^{-rT} E[f_\varepsilon(S_T - K)] &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[f_\varepsilon(S_t - K)] dt \\ &+ \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[f'_\varepsilon(S_t - K) S_t] r dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} (K+x)^2 \sigma^2(t, K+x) p(t, K+x) dt, \end{aligned} \quad (4.18)$$

En utilisant l'hypothèse 2 ci-dessus, on peut passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &C(T + \theta, K) - C(T, K) \\ &= -r \int_T^{T+\theta} C(t, K) dt + r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[S_t \mathbf{1}_{S_t \geq K}] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K) K^2 p(t, K) dt \\ &= rK \int_T^{T+\theta} e^{-rt} P[S_t \geq K] dt + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K) K^2 p(t, K) dt. \end{aligned}$$

En divisant les deux parties par θ et en passant à la limite $\theta \rightarrow 0$, ceci donne

$$\frac{\partial C}{\partial T} = rKe^{-rT}P[S_T \geq K] + \frac{1}{2}e^{-rT}\sigma^2(T, K)K^2p(T, K).$$

Finalement, en observant que

$$e^{-rT}P[S_T \geq K] = -\frac{\partial C}{\partial K} \quad \text{et} \quad e^{-rT}p(T, K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2},$$

on trouve l'équation de Dupire. □

Modèle à volatilité locale comme projection markovienne Soit $(S_t)_{t_0 \leq t}$ un processus d'Itô général de la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dW_t, \quad S_{t_0} = S_0$$

avec σ_t aléatoire, et supposons que $\sigma^2(t, x) = E[\sigma_t^2 | S_t = x]$ vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus. En suivant la preuve étape par étape, il est facile de se convaincre que les prix des options dans le modèle associé à (S_t) vérifient l'équation de Dupire avec volatilité $\sigma(t, x)$. Autrement dit, la fonction de volatilité $\sigma^2(t, x) = E[\sigma_t^2 | S_t = x]$ définit une diffusion markovienne qui a les mêmes prix d'options européennes et donc les mêmes lois marginales que (S_t) . Cette diffusion s'appelle la *projection markovienne* de (S_t) .

Théorème 7 permet de retrouver le coefficient de volatilité à partir d'un ensemble complet de prix de calls à une date donnée, *si on sait que ces prix proviennent d'un modèle de volatilité locale*. Il ne permet pas directement de répondre à la question suivante : étant donné un système de prix de calls $(C(T, K))_{T \geq 0, K \geq 0}$, est-ce qu'il existe un modèle de diffusion continu permettant de reproduire ces prix ? Pour appliquer la formule de Dupire (4.15) on a besoin au moins de supposer $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} > 0$ et $\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} \geq 0$. Ces contraintes correspondent aux contraintes d'arbitrage de positivité d'un *butterfly spread* et d'un *calendar spread* respectivement (voir section 2.2).

Exemple 3. Figure 4.1 montre les résultats d'application de la formule de Dupire aux données artificielles (gauche) et aux prix réels d'options sur l'indice S&P 500. Alors que sur les données simulées, la formule de Dupire permet de retrouver un surface de volatilité locale qui paraît cohérent, la performance pour les données réelles n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons :

- Les prix de marché ne sont pas connus pour tous les strikes et toutes les maturités. Ils doivent donc être interpolés et le résultat final sera très sensible à la méthode d'interpolation utilisée.
- Du fait de la nécessité de calculer la deuxième dérivée de la fonction de prix d'option $C(T, K)$, les petites erreurs de données conduisent à des très grands erreurs sur la solution (problème mal posé). On reviendra sur ce point dans la section 4.6.

4.5 Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale

Lien entre volatilité locale et volatilité implicite La formule de Dupire (4.15) peut être réécrite en terme de volatilités implicites du marché, en observant que pour toute option on a

$$C(T, K) = C_{BS}(T, K, I(T, K)),$$

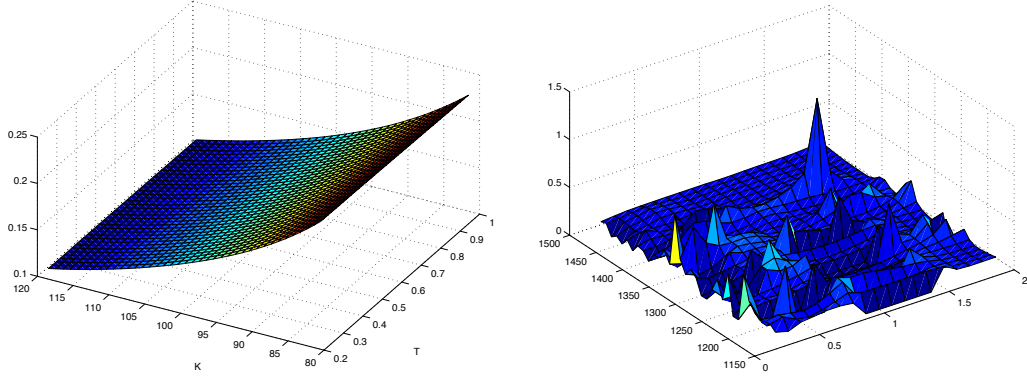


FIGURE 4.1 – Exemple de diffusion implicite. Gauche : données artificielles : la volatilité implicite est de la forme $I(K) = 0.15 \times \frac{100}{K}$ pour toutes maturités ($S_0 = 100$). Droite : données d'options sur S&P 500, interpolation par splines.

où $C_{BS}(T, K, \sigma)$ dénote la formule Black-Scholes pour le prix d'une call de volatilité σ et $I(T, K)$ est la volatilité implicite observée pour maturité T et strike K . Il sera plus pratique d'exprimer les prix en terme de *log-moneyness* $x = \log(S/K) - rT$, avec $I(T, K) = \tilde{I}(T, x)$ et $\sigma(T, K) = \tilde{\sigma}(T, x)$ et volatilité implicite sans dimension $v(T, x) = \tilde{I}(T, x)\sqrt{T}$. On a alors

$$\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial T} = Sn(d_1) \frac{\partial v}{\partial T} \quad (4.19)$$

et

$$K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = Sn(d_1) \left\{ v''_{xx} - \frac{v}{4} (v'_x)^2 + \frac{1}{v} \left(1 - \frac{xv'_x}{v}\right)^2 \right\}, \quad (4.20)$$

ce qui donne finalement la formule de Dupire en terme de volatilités implicites

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2(T, x) &= \frac{2vv'_T}{vv''_{xx} - \frac{v^2}{4}(v'_x)^2 + \left(1 - \frac{xv'_x}{v}\right)^2} \\ &= \frac{2\tilde{I}T\tilde{I}'_T + \tilde{I}^2}{\tilde{I}T\tilde{I}''_{xx} - \frac{\tilde{I}^2T^2}{4}(\tilde{I}'_x)^2 + \left(1 - \frac{x\tilde{I}'_x}{\tilde{I}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pour tirer quelques conclusions de cette formulation, dans un premier temps supposons que la volatilité implicite ne dépend pas de strike (absence de smile). Dans ce cas la volatilité locale ne dépend pas non plus de strike et la formule (4.21) se réduit à

$$\sigma^2(T) = I^2(T) + 2I(T)T \frac{\partial I}{\partial T},$$

d'où

$$I^2(T) = \frac{\int_0^T \sigma^2(s) ds}{T},$$

la volatilité implicite est donc égale à la moyenne quadratique de la volatilité locale sur la durée de vie de l'option.

En supposant que I et ses dérivées restent finis lorsque $T \rightarrow 0$, dans cette limite, l'équation (4.21) devient

$$\tilde{I}^2(0, x) = \tilde{\sigma}^2(0, x) \left(1 - \frac{x}{\tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x} \right)^2.$$

Cette équation différentielle se résout explicitement :

$$\tilde{I}(0, x) = \left\{ \int_0^1 \frac{dy}{\tilde{\sigma}(0, xy)} \right\}^{-1}. \quad (4.22)$$

Nous avons donc démontré que, *dans la limite de très courte maturité, la volatilité implicite est égale à la moyenne harmonique des volatilités locales*, un résultat établi dans Berestycki et al. [2002]. Lorsque la volatilité locale $\sigma(0, x)$ est différentiable en $x = 0$, équation (4.22) permet de démontrer que (le calcul est laissé au lecteur)

$$\frac{\partial \tilde{I}(0, 0)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}(0, 0)}{\partial x},$$

la pente à la monnaie de la volatilité locale est égale, pour les courtes maturités, à 2 fois la pente à la monnaie de la volatilité implicite.

4.6 Calibration de la volatilité locale

L'équation de Dupire (4.16) définit l'opérateur de pricing $\sigma(*, *) \mapsto C(*, *)$, qui à une fonction de volatilité locale donnée associe l'ensemble des prix de calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Inversement, si on observe tous les prix d'options pour tous les strikes et maturités, on peut reconstruire, grâce à la formule de Dupire (4.15). En pratique, on ne dispose que d'un nombre fini de strikes et maturités, et l'opération inverse qui consiste à reconstruire $\sigma(t, S)$ pour tout t, S à partir d'un nombre fini de prix $C_M(T_i, K_i)$, $i = 1 \dots N$, devient un problème mal posé (cf. exemple 3). Pour résoudre cette difficulté, on peut utiliser l'interpolation de la volatilité implicite par une forme paramétrique ou semiparamétrique. Les méthodes d'interpolation complètement nonparamétriques (comme les splines) ont en général une performance assez médiocre pour ce type de problèmes.

4.6.1 Interpolation de la volatilité implicite

La paramétrisation suivante pour la volatilité implicite en fonction du paramètre de log-strike $k = \log \frac{K}{S} - rT$ a été proposée par Jim Gatheral [Gatheral, 2004] (voir également Zeliade), sous le nom de SVI (stochastic volatility inspired) : pour une échéance donnée, la variance implicite totale sans dimension $V(T, k) = I^2(T, k)T$ vérifie

$$V(k) = a + b\{\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}\}$$

avec $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $\rho \in [-1, 1]$ et $m \in \mathbb{R}$. Ici,

- a contrôle le niveau global du smile ;
- b contrôle la pente des ailes ;
- ρ contrôle l'asymétrie, "rotation" du smile ;
- m correspond à une translation ;
- σ contrôle la convexité à la monnaie.

La forme paramétrique SVI doit être calibrée séparément pour chaque échéance disponible. Ensuite, on peut définir la volatilité implicite aux dates intermédiaires par interpolation. Une fois l'interpolation trouvée pour chaque k et T , la volatilité locale peut être calculée par la formule de Dupire, qui s'écrit en termes de V :

$$\sigma(T, k) = \frac{\frac{\partial V(T, k)}{\partial T}}{\left(1 - \frac{k}{2V} \frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} - \frac{1}{4V} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2}. \quad (4.23)$$

4.6.2 Conditions d'absence d'arbitrage

La paramétrisation SVI peut a priori conduire à des opportunités d'arbitrage statiques, telles que les prix d'options non convexes en fonction du strike. Dans la suite de cette section, nous donnerons les conditions d'absence d'arbitrage pour une surface des prix d'options et pour une surface de volatilité implicite.

Définition 4. Une surface de prix d'options $(T_i, K_i, C_i)_{i \in I}$ est *sans arbitrage* s'il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et une \mathbb{F} -martingale positive X telle que $C_i = \mathbb{E}[(X_{T_i} - K_i)^+]$ pour tout $i \in I$.

Surfaces de prix d'options sans arbitrage Le résultat suivant, du à Roper Roper [2010] établit les conditions nécessaires et suffisantes pour un surface de prix d'options sans arbitrage. Pour simplifier la discussion, on suppose que le taux d'intérêt est nul.

Proposition 2. Soit $s > 0$ une constante et soit $C : [0, \infty) \times [0, \infty)$ une surface de prix d'options vérifiant les conditions suivantes :

1. Convexité en K (positivité des butterfly spreads) : pour tout $T \geq 0$, $C(T, \cdot)$ est convexe.
2. Monotonie en T (positivité des calendar spreads) : pour tout $K \geq 0$, $C(K, \cdot)$ est croissant.
3. Bornes :

$$(s - K)^+ \leq C(T, K) \leq s \quad \forall K \geq 0, \forall T \geq 0.$$

4. Valeur à l'échéance :

$$C(0, K) = (s - K)^+ \quad \forall K > 0.$$

5. Limite de grands strikes :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} C(T, K) = 0 \quad \forall T \geq 0.$$

Alors la surface $(C(T, K))_{T \geq 0, K \geq 0}$ est sans arbitrage.

Inversement, si X est une martingale positive avec $X_0 = s$ alors la fonction $C(T, K) = \mathbb{E}[(X_T - K)^+]$ vérifie les conditions 1–5 ci-dessus.

Idée de la preuve. Choisissons $T \geq 0$ et posons $F_T(x) = 1 + C'_+(T, x)$ pour $x \geq 0$ et $F_T(x) = 0$ pour $x < 0$, où $C'_+(T, x)$ est la dérivée à droite de C par rapport à son premier argument, qui existe pour tout x et T puisque $C(T, \cdot)$ est convexe. La convexité implique également que $F_T(x)$ est continu à droite et croissant en x . De plus, par la propriété 5 et la convexité, la fonction $F_T(x)$ vérifie $\lim_{x \rightarrow \infty} F_T(x) = 1$ et la propriété 3 avec la convexité implique que $F_T(x)$ est borné inférieurement par 0. Autrement dit, $F_T(x)$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité μ_T à support sur $[0, \infty)$, et on peut écrire, pour tout $K, T \geq 0$,

$$C(K, T) = s - \int_{[0, \infty)} (x \wedge K) \mu_T(dx),$$

ce qui implique, en utilisant la convergence dominée et la propriété 5, que

$$C(K, T) = \int_{[0, \infty)} (x - K)^+ \mu_T(dx).$$

La monotonie de $C(x, T)$ par rapport à T pour x fixé signifie que la famille des mesures de probabilité $(\mu_T)_{T \geq 0}$ est croissante en ordre convexe, et le théorème de Kellerer permet alors de conclure qu'il existe une martingale X avec lois marginales données par $(\mu_T)_{T \geq 0}$.

Pour montrer l'implication inverse, on vérifie directement les propriétés 1–5 pour une martingale positive X . \square

Surfaces de volatilité implicite sans arbitrage En utilisant la proposition 2, Roper Roper [2010] obtient une condition suffisante pour une *surface de volatilité implicite* sans arbitrage. Nous allons exprimer ces conditions en termes de log-moneyness x et la volatilité implicite sans dimension $v(T, x)$ introduite ci-dessus. Ces conditions ne changent pas en présence d'un taux d'intérêt constant.

Proposition 3. *Soit $s > 0$ et supposons que la fonction $v : [0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifie les conditions suivantes :*

1. *Différentiabilité : $T > 0$, $v(T, \cdot)$ est différentiable deux fois.*
2. *Condition de Durrleman : pour tout $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$vv''_{xx} - \frac{v^2}{4}(v'_x)^2 + \left(1 - \frac{xv'_x}{v}\right) \geq 0.$$

3. *Monotonie en T : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(\cdot, x)$ est croissant.*
4. *Positivité : pour tout $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $v(T, x) > 0$.*
5. *Valeur à l'échéance : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(0, x) = 0$.*
6. *Limite de grand strike : pour tout $T > 0$,*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} d_+(x, v(T, x)) = -\infty,$$

$$\text{où } d_{\pm}(x, v) := \frac{x}{v} \pm \frac{v}{2}.$$

Alors la surface des prix d'options définie par

$$\tilde{C}(T, x) = sN(d_+(x, v(T, x))) - se^{-x}N(d_-(x, v(T, x)))$$

est sans arbitrage.

Démonstration. On peut vérifier directement que sous l'hypothèse de différentiabilité, les propriétés 2–6 impliquent les propriétés correspondantes de la surface des prix d'options. En particulier, la condition de Durrleman et la monotonie en T assurent la positivité des butterfly et calendar spread, et la dernière condition assure que le prix du call converge vers zéro dans la limite du grand strike. \square

Paramétrisation arbitrage-free SSVI de Gatheral et Jacquier Gatheral and Jacquier [2012] proposent la paramétrisation suivante pour toute la nappe de volatilité implicite sous le nom de Surface SVI (SSVI) :

$$V(t, k) = \frac{\theta_t}{2} \left\{ 1 + \rho\phi(\theta_t)k + \sqrt{(\phi(\theta_t)k + \rho)^2 + 1 - \rho^2} \right\}. \quad (4.24)$$

Ici, $\theta_t = V(t, 0)$ est la variance implicite totale à la monnaie, déduite directement de la nappe du marché. Le paramètre ρ contrôle l'asymétrie du smile ; pour $\rho = 0$, le smile est symétrique à toute date. Le skew et la convexité ATM sont donnés par

$$\frac{\partial I(t, k)}{\partial k} \Big|_{k=0} = \frac{\rho\sqrt{\theta_t}}{2\sqrt{t}}\phi(\theta_t), \quad \frac{\partial^2 I(t, k)}{\partial k^2} \Big|_{k=0} = \frac{(1 - 2\rho^2)\sqrt{\theta_t}}{4\sqrt{t}}\phi^2(\theta_t).$$

On peut montrer que la forme paramétrique (4.24) n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si les conditions suffisantes suivantes sont respectées :

- La fonction θ_t est croissante en t ;
- La fonction ϕ vérifie les relations suivantes, pour tout $\theta > 0$:

$$0 \leq \frac{\partial(\theta\phi(\theta))}{\partial\theta} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2}\phi(\theta),$$

$$\theta\phi(\theta) < \frac{4}{1 + |\rho|}, \quad \theta\phi^2(\theta) \leq \frac{4}{1 + |\rho|}.$$

Par exemple, la fonction

$$\phi(\theta) = \frac{\eta}{\theta^\gamma(1 + \theta)^{1-\gamma}}$$

vérifie les contraintes d'arbitrage pour $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ et $\eta \leq \frac{2}{\sqrt{1+|\rho|}}$.

Voir le cours de Gatheral sur le site de Imperial College

<https://www.imperial.ac.uk/quantitative-finance/events/lectures/2014-15/gatheral/>
pour les exemples de calibration du modèle SSVI aux surfaces de volatilité implicite du marché.

Chapitre 5

Valorisation d'options exotiques

- *Modèle de Black-Scholes-Samuelson multidimensionnel.*
- *Dynamique d'un portefeuille autofinçant contenant plusieurs actifs risqués. Représentation des stratégies de portefeuille en termes du nombre d'unités de chaque actif, du montant investi dans chaque actif, et de la proportion de la richesse totale investie dans chaque actif.*
- *Stratégies admissibles, absence d'opportunité d'arbitrage, primes de risque.*
- *Formule de valorisation risque-neutre des actifs contingents.*
- *Formule de Black-Scholes avec volatilité et taux d'intérêt déterministes dépendants du temps.*
- *Méthode de changement de numéraire. Transformation des volatilités par changement de numéraire.*
- *Mesure martingale associée au numéraire ; formule de changement de mesure martingale par changement de numéraire.*
- *Formule de Black-Scholes généralisée.*
- *Valorisation d'une option quanto.*
- *Probabilité forward-neutre.*
- *Options à barrière : valorisation par réplication dynamique.*
- *Options à barrière : valorisation des options Regular par réplication statique.*
- *Réplication d'une option Européenne quelconque par des calls et puts.*
- *Swap de variance : réplication statique.*

5.1 Evaluation risque-neutre

Modèle de Black-Scholes multidimensionnel Dans cette section nous introduisons un modèle du marché plus général que celui de la section 3.1, fondé sur le calcul stochastique et applicable aux options exotiques ainsi qu'aux options sur plusieurs sous-jacents.

Soit $W = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0}^\perp$ un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle complétée par les ensembles de mesure nulle. Nous considérons un

marché financier composé d'un actif sans risque et de d actifs risqués. La valeur de l'actif sans risque à toute date t est donnée par

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right), \quad (5.1)$$

où le taux d'intérêt instantané r est un processus positif mesurable et adapté. Les valeurs des d actifs risqués vérifient

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(\int_0^t \left(b^i(u) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d |\sigma^{ij}(t)|^2\right) dt + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j\right), \quad i = 1, \dots, d,$$

où μ et σ sont des processus mesurables adaptés. Les processus r , b et σ vérifient la condition d'intégrabilité

$$\int_0^T (\|r(t)\| + \|b(t)\| + \|\sigma(t)\|^2) dt < \infty, \quad \text{p.s.},$$

où T est un horizon de temps. De plus, on suppose que la matrice $\sigma(t)$ est inversible pour tout t .

Par application de la formule d'Itô,

$$dS_t^i = S_t^i \left(b^i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j \right),$$

ou avec des notations matricielles,

$$dS_t = \text{diag}[S_t](b(t)dt + \sigma(t)dW_t), \quad (5.2)$$

où $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)^\top$, $b(t) = (b^1(t), \dots, b^d(t))^\top$ et $\text{diag}[S_t]$ est la matrice ayant les éléments du vecteur S_t sur la diagonale principale et zéros partout ailleurs.

Introduisons le vecteur des *primes de risque* :

$$\lambda(t) = \sigma(t)^{-1}(b(t) - r(t)\mathbf{1}),$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur colonne d -dimensionnel dont tous les éléments sont égaux à 1. Cela permet d'écrire

$$dS_t = \text{diag}[S_t] \{r(t)\mathbf{1}dt + \sigma(t)(\lambda(t)dt + dW_t)\}.$$

L'actualisation simplifie considérablement les développements qui vont suivre :

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = S_t e^{-\int_0^t r(s)ds},$$

et on a alors

$$d\tilde{S}_t = \text{diag}[\tilde{S}_t] \sigma(t)(\lambda(t)dt + dW_t).$$

Stratégies de portefeuille Une stratégie de portefeuille détermine les positions de l'investisseur dans chaque actif à toute date. Cette stratégie peut être exprimée de manière équivalente en termes de *quantités* des actifs risqués à acheter $\delta_t = (\delta_t^1, \dots, \delta_t^d) \in \mathbb{R}^d$, en termes de *montants* à investir dans chaque actif risqué $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d) \in \mathbb{R}^d$ ou bien, si la valeur du portefeuille notée par X_t est positive à toute date, en termes de *proportions* de la richesse totale à investir dans chaque actif risqué $\omega_t = (\omega_t^1, \dots, \omega_t^d) \in \mathbb{R}^d$. Ces coefficients sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$\pi_t^i = \delta_t^i S_t^i \quad \text{et} \quad w_t^i = \frac{\delta_t^i S_t^i}{X_t}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Le montant investi en l'actif sans risque est donné par

$$X_t - \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i = X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i = X_t \left(1 - \sum_{i=1}^d w_t^i \right)$$

L'équation d'autofinancement exprime le fait que aucun montant n'est retiré ni injecté dans le portefeuille. Pour les différentes représentations de la stratégie, elle s'écrit de manières suivantes :

— En termes de quantités :

$$dX_t = \sum_{i=1}^d \delta_t^i dS_t^i + \left(X_t - \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}.$$

— En termes de montants :

$$dX_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}. \quad (5.3)$$

— En termes de proportions :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sum_{i=1}^d \omega_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^d \omega_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}.$$

Dans ce chapitre on va essentiellement représenter les stratégies de portefeuille en termes de *montants* investis en chaque actif risqué. Une stratégie de portefeuille est donc un couple $(x, (\pi_t)_{0 \leq t \leq T})$, où x est la valeur initiale et $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d) \in \mathbb{R}^d$ (vecteur ligne) représente le montant à investir dans chaque actif risqué à la date t , et la dynamique du portefeuille autofinçant est déterminée par l'équation (5.3). En passant aux valeurs actualisées, cette équation se simplifie :

$$d\tilde{X}_t = \tilde{\pi}_t \text{diag}[\tilde{S}_t]^{-1} d\tilde{S}_t = \tilde{\pi}_t \sigma(t) \{ \lambda(t) dt + dW_t \}.$$

Dans la suite, on notera par $X_t^{x, \pi}$ la valeur du portefeuille autofinçant de valeur initiale x et géré avec la stratégie π .

En supposant que la prime de risque vérifie la condition de Novikov

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt \right) \right] < \infty,$$

on obtient par théorème de Girsanov que sous la probabilité \mathbb{Q} définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(- \int_0^T \lambda(t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt \right),$$

le processus

$$\widehat{W}_t = \int_0^t \lambda(s) ds + W_t$$

est un mouvement brownien. On peut alors écrire

$$\tilde{X}_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \tilde{\pi}_u \sigma(u) d\widehat{W}_u. \quad (5.4)$$

Remarquons que sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , la valeur actualisée d'un portefeuille autofinancant, et les prix actualisés des actifs risqués sont des *martingales locales*, mais pas nécessairement des martingales.

Définition 5. La stratégie de portefeuille $(\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ est admissible si l'intégrale (5.4) est bien défini, ce qui est le cas si

$$\int_0^T \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du < \infty \quad \text{p.s.},$$

et si la valeur de portefeuille vérifie

$$\tilde{X}_t^{0,\pi} \geq M_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.5)$$

où M est une \mathbb{Q} -martingale.

Dans la suite, on notera par \mathcal{A} l'ensemble des stratégies admissibles.

Portefeuilles admissibles et absence d'arbitrage

Définition 6 (Absence d'opportunité d'arbitrage). On dit que le marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si, pour toute stratégie admissible de la forme π ,

$$X_T^{0,\pi} \geq 0 \quad \text{p.s.} \quad \Rightarrow \quad X_T^{0,\pi} = 0 \quad \text{p.s.}$$

La condition (5.5) est nécessaire en temps continu pour éviter des arbitrages de type "stratégie de doublement de la mise". Pour décrire une telle stratégie, supposons que le cours du sous-jacent est modélisé par un mouvement brownien standard : $S_t = W_t$, et que le taux d'intérêt est nul

sur le marché. La stratégie consiste à détenir $2^{n/2}$ unités de l'actif risqué sur l'intervalle de temps $(t_{k-1}, t_k]$, où l'on pose $t_k = 1 - \frac{1}{2^k}$. La valeur du portefeuille à l'instant t_n est alors donnée par

$$X_{t_n} = \sum_{k=1}^n 2^{k/2} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^n Z_k,$$

où $(Z_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables i.i.d. de loi normale centrée réduite. $(X_{t_n})_{n \geq 1}$ est alors une marche aléatoire gaussienne, qui vérifie

$$\inf\{n : X_{t_n} \geq K\} < \infty \quad \text{p.s.} \quad \forall K.$$

Il est donc possible de réaliser un gain arbitrairement grand, en un temps fini (sur l'intervalle de temps $[0, 1]$). Cependant, cette stratégie n'est pas admissible au sens de la définition 5. En pratique, avant d'atteindre la valeur K , le portefeuille peut prendre des valeurs négatives arbitrairement grandes.

Théorème 8. *Le marché financier défini par (5.1), (5.2) et (5.4), avec les stratégies admissibles données par Définition 5, n'admet pas d'opportunité d'arbitrage.*

Démonstration. Soit π une stratégie admissible telle que $X_T^{0,\pi} \geq 0$ p.s. On pose

$$\tau_n = \inf \left\{ t : \int_0^t \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du \geq n \right\} \wedge T.$$

Alors, (τ_n) est une suite des temps d'arrêt qui converge p.s. vers T et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{\tau_n} \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du \right] \leq n < \infty,$$

ce qui implique que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi}] = 0.$$

pour tout n . Mais par le lemme de Fatou, puisque $\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi} - M_{\tau_n} \geq 0$, on a :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_T^{0,\pi}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi} - M_{\tau_n}) \right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_0] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\tilde{X}_{\tau_n}^{0,\pi} - M_{\tau_n})] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_0] = 0,$$

ce qui implique que $X_T^{0,\pi} = 0$ p.s. □

Remarque 1. Avec la condition de la ligne de crédit intégrable (5.5), l'existence des primes de risque

$$b(t) = r(t)\mathbf{1} + \sigma(t)\lambda(t)$$

vérifiant la condition de Novikov est suffisante pour l'absence d'arbitrage même si le nombre de facteurs de risque (browniens) ne coïncide pas avec le nombre d'actifs risqués. S'il y a plus d'actifs que de facteurs de risque, cette condition donne des contraintes sur les rendements des actifs (voir l'exercice à la fin de ce chapitre). Si le nombre de facteurs est supérieur au nombre d'actifs, il y a plusieurs primes de risque possibles et donc plusieurs probabilités risque-neutres.

Evaluation des actifs contingents Le prix de surcouverture d'un actif contingent est le coût minimal d'un portefeuille qui domine cet actif à la date T :

Définition 7 (Prix de surcouverture). Soit $G \in \mathcal{F}_T$. Le prix de surcouverture de G à l'instant $t = 0$ est défini par

$$\bar{V}_0(G) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists \pi \text{ avec } \pi \in \mathcal{A} \text{ et } X_T^{x,\pi} \geq G\}.$$

Le prix de surcouverture de G à l'instant $t \in [0, T]$ est défini par

$$\bar{V}_t(G) = \text{essinf}\{X \in \mathcal{F}_t : \exists \pi \in \mathcal{A} \text{ avec } X_t^{x,\pi} = X \text{ et } X_T^{x,\pi} \geq G\}.$$

De la même manière, on peut définir le prix de sous-couverture d'un actif contingent, qui sera noté par $\underline{V}_0(G)$ et $\underline{V}_t(G)$: Le prix de sous-couverture de G à l'instant $t = 0$ est défini par

$$\underline{V}_0(G) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists \pi \text{ avec } -\pi \in \mathcal{A} \text{ et } X_T^{x,\pi} \leq G\}.$$

Le prix de sous-couverture de G à l'instant $t \in [0, T]$ est défini par

$$\underline{V}_t(G) = \text{essinf}\{X \in \mathcal{F}_t : \exists \pi \text{ avec } -\pi \in \mathcal{A} \text{ avec } X_t^{x,\pi} = X \text{ et } X_T^{x,\pi} \leq G\}.$$

La présence de $-\pi$ dans la définition du prix de sous-couverture est logique : si l'actif est disponible sur le marché au prix inférieur de son prix de sous-couverture, la stratégie d'arbitrage consiste à acheter l'actif et vendre le portefeuille de sous-couverture, et pour cela il faut que la stratégie $-\pi$ soit admissible. Si un actif est repliquable par un portefeuille admissible, il est clair, que son prix de surcouverture coïncide avec son prix de sous-couverture. Dans ce cas, on appellera cet unique prix *le prix de non-arbitrage*.

Théorème 9. Soit $G \in \mathcal{F}_T$ un actif contingent tel que $\tilde{G} \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$. Alors il existe un portefeuille de replication pour G et à tout instant $t \leq T$, le prix de non-arbitrage de G est donné par

$$V_t(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Démonstration. Par le théorème de représentation des martingales dans la filtration brownienne (Théorème 10), pour tout $G \in \mathcal{F}_T$ avec $\tilde{G} \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$, il existe un unique processus adapté $H \in \mathcal{H}^2$ avec

$$\tilde{G} = \mathbb{E}[\tilde{G}] + \int_0^T H_s d\widehat{W}_s.$$

Posons $\tilde{\pi}_t = \sigma(t)^{-1} H_t$. Alors

$$\tilde{X}_t^{x,\pi} := \mathbb{E}[\tilde{G}] + \int_0^t \tilde{\pi}_s \sigma(s) d\widehat{W}_s$$

est la valeur actualisée d'un portefeuille autofinçant qui permet de repliquer l'actif contingent G . De plus \tilde{X}_t est un \mathbb{Q} -martingale et donc un portefeuille admissible. Par la propriété de martingale on a alors

$$\tilde{X}_t^{x,\pi} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

□

Les implications pratiques des développements de cette section peuvent être résumées comme suit :

Valorisation d'actifs contingents dans le modèle de Black et Scholes

Dans le modèle de Black et Scholes généralisé, défini par équations (5.1) et (5.2), l'unique prix de non-arbitrage d'une option de pay-off $G \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ à l'instant T est donné par

$$V_t(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où \mathbb{Q} est la probabilité risque-neutre, c'est-à-dire, une probabilité telle que les actifs risqués vérifient

$$dS_t = \text{diag}[S_t](r(t)\mathbf{1}dt + \sigma(t)d\widehat{W}_t),$$

où \widehat{W} est un \mathbb{Q} -mouvement brownien.

Retour sur la formule de Black et Scholes Supposons que le nombre d'actifs risqués est égal à $d = 1$, et le pay-off G est une fonction déterministe de la valeur finale du sous-jacent : $G = g(S_T)$, et que les processus r et σ sont déterministes. Dans ce cas, la formule de pricing devient

$$\begin{aligned} V_t(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} g(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} g \left(S_t e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] := v(t, S_t), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} v(t, S) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} g \left(S e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(T-t)\bar{r}} g \left(S e^{(\bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2})(T-t) + \bar{\sigma}\widehat{W}_{T-t}} \right) \right], \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\bar{r} := \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s) ds \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds. \quad (5.6)$$

Dans le cas d'une option Call, on a $g(S) = (S - K)^+$ et

$$\begin{aligned} V_t(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} (S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\int_0^t r(s) ds} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[Z_T \mathbf{1}_{S_T \geq K} \middle| \mathcal{F}_t \right] - K e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbb{Q}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

avec

$$Z_T = e^{-\int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_0^T \sigma(s) d\widehat{W}_s}.$$

Introduisons une nouvelle probabilité $\widetilde{\mathbb{Q}}$ via

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \bigg|_{\mathcal{F}_T} = Z_T.$$

On a alors

$$\pi_t(G) = S_t \tilde{\mathbb{Q}}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t] - K e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbb{Q}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t].$$

De plus,

$$\tilde{W}_t = \widehat{W}_t - \int_0^t \sigma(s) ds$$

est un mouvement Brownien sous $\tilde{\mathbb{Q}}$, et donc

$$\begin{aligned} V_t(G) &= S_t \tilde{\mathbb{Q}} \left[S_t e^{\int_t^T \left(r(s) + \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\tilde{W}_s} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - K e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbb{Q} \left[S_t e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t \tilde{\mathbb{Q}} \left[S_t e^{\left(\bar{r} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) (T-t) + \bar{\sigma} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - K e^{-\bar{r}(T-t)} \mathbb{Q} \left[S_t e^{\left(\bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) (T-t) + \bar{\sigma} (\widehat{W}_T - \widehat{W}_t)} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t N(d_1) - K e^{-\bar{r}(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

avec

$$d_{12} = \frac{\log \frac{S_t}{K e^{-\bar{r}(T-t)}} \pm \frac{\bar{\sigma}^2 (T-t)}{2}}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}}.$$

En conclusion, on a obtenu le résultat suivant, qui généralise la formule de Black-Scholes classique :

Le prix d'une option Call dans le modèle de Black-Scholes avec volatilité et taux d'intérêt déterministes dépendants du temps est donné par

$$C_{BS}(t, S) = S_t N(d_1) - K e^{-\bar{r}(T-t)} N(d_2), \quad (5.7)$$

où les coefficients d_{12} sont donnés ci-dessus, et \bar{r} et $\bar{\sigma}$ sont, respectivement, le taux d'intérêt et la volatilité moyennes, définis dans (5.6).

5.2 Changement de numéraire

Dans cette section on verra que la valorisation de certaines options peut être largement simplifiée, en exprimant les prix de tous les actifs, et la valeur du portefeuille en unités d'un actif de référence, appelé *numéraire*. Les exemples les plus utiles des numéraires sont les actifs sans risque étrangers pour la valorisation des options de change, le portefeuille du marché ou le zéro-coupon. L'actualisation des actifs revient à utiliser l'actif sans risque domestique comme numéraire.

Définition 8. Un *numéraire* est un actif ou un portefeuille autofinçant, dont la valeur (Y_t) vérifie les conditions suivantes :

- Stricte positivité : $Y_t > 0$ pour tout $t \in [0, T]$ p.s.
- Propriété de martingale : la valeur actualisée $(\tilde{Y}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une \mathbb{Q} -martingale.

Dans cette section, nous n'allons pas systématiquement choisir l'actif sans risque comme numéraire, et il ne jouera pas de rôle particulier. Pour rendre le modèle plus symétrique, on écrira alors $S_t = (S_t^0, \dots, S_t^d)^\perp$ avec

$$dS_t^i = S_t^i \left(b^i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t)dW_t^j \right), \quad i = 0, \dots, d,$$

où l'on pose $b^0(t) = r(t)$ et $\sigma^{0j}(t) = 0$. La valeur et la dynamique d'un portefeuille autofinçant (en termes de quantités) s'écrivent alors

$$X_t = \sum_{i=0}^d \delta_t^i S_t^i, \quad dX_t = \sum_{i=0}^d \delta_t^i dS_t^i.$$

Pour un portefeuille ou un actif X et un numéraire Y , nous noterons parfois la valeur de X exprimée en numéraire Y par $X_t^Y := \frac{X_t}{Y_t}$.

Changement de numéraire et volatilités Supposons que la dynamique de l'actif X (en euros, avec les notations vectorielles) est

$$dX_t = X_t \{ r(t)dt + \gamma^X(t)(\lambda(t)dt + dW_t) \}$$

et la dynamique du numéraire Y est

$$dY_t = Y_t \{ r(t)dt + \gamma^Y(t)(\lambda(t)dt + dW_t) \}.$$

On peut alors exprimer la dynamique de X dans le numéraire Y à l'aide de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dX_t^Y &= \frac{dX_t}{Y_t} - \frac{X_t}{Y_t^2} dY_t + \frac{X_t}{Y_t^3} d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle X, Y \rangle_t}{Y_t^2} \\ &= X_t^Y \{ (\gamma^X(t) - \gamma^Y(t))(\lambda(t)dt + dW_t) + \gamma^Y(t)\gamma^Y(t)^\perp dt - \gamma^X(t)\gamma^X(t)^\perp dt \} \\ &= X_t^Y (\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)) \{ (\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp)dt + dW_t \}. \end{aligned}$$

Dans le nouveau numéraire, la volatilité (vectorielle) de X est donnée par $\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)$, et le vecteur des primes de risque devient $\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp$.

En particulier, la dynamique des actifs risqués dans le nouveau numéraire devient

$$dS_t = \text{diag}[S_t](\sigma(t) - \mathbf{1}\gamma^Y(t))((\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp)dt + dW_t)$$

ou encore sous la probabilité risque-neutre

$$dS_t = \text{diag}[S_t](\sigma(t) - \mathbf{1}\gamma^Y(t))(-\gamma^Y(t)^\perp dt + d\widehat{W}_t). \quad (5.8)$$

Exemple 4. Le vecteur de volatilité $\gamma^X(t)$ contient les coefficients devant les mouvements browniens indépendants W^1, \dots, W^d dans la dynamique de X . La volatilité scalaire de X (écart type des rendements) est donnée par la norme euclidienne du vecteur de volatilité : $\sigma^X(t) = \|\gamma^X(t)\|$.

Supposons que la dynamique de X et Y est

$$dX_t = X_t \{b^X(t)dt + \sigma^X(t)dW_t^X\} \quad \text{et} \quad dY_t = Y_t \{b^Y(t)dt + \sigma^Y(t)dW_t^Y\},$$

où W^X et W^Y sont des mouvements browniens unidimensionnels tels que

$$d\langle W^X, W^Y \rangle = \rho dt.$$

Nous pouvons alors exprimer la dynamique de X et Y à l'aide de deux mouvements browniens indépendants \widehat{W}^1 et \widehat{W}^2 :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \{b^X(t)dt + \sigma^X(t)d\widehat{W}_t^1\} \\ dY_t &= Y_t \{b^Y(t)dt + \sigma^Y(t)(\rho d\widehat{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}d\widehat{W}_t^2)\}. \end{aligned}$$

On en déduit une représentation vectorielle :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \{b^X(t)dt + \gamma^X(t)d\widehat{W}_t\}, & \gamma^X(t) &= (\sigma^X(t), 0), \\ dY_t &= Y_t \{b^Y(t)dt + \gamma^Y(t)d\widehat{W}_t\}, & \gamma^Y(t) &= (\sigma^Y(t)\rho, \sigma^Y(t)\sqrt{1-\rho^2}). \end{aligned}$$

La volatilité (scalaire) de X dans le numéraire Y est donc donnée par

$$\begin{aligned} \|\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)\| &= \sqrt{(\sigma^X(t) - \rho\sigma^Y(t))^2 + (1-\rho^2)\sigma^Y(t)^2} \\ &= \sqrt{\sigma^X(t)^2 + \sigma^Y(t)^2 - 2\rho\sigma^X(t)\sigma^Y(t)}. \end{aligned}$$

Changement de numéraire et changement de probabilité Soit Y un numéraire. L'équation (5.8) montre que dans ce numéraire, les prix actualisés des actifs ne sont pas des martingales locales sous la probabilité risque neutre. Dans le nouveau numéraire, la probabilité risque-neutre sera remplacée par une autre mesure de probabilité qu'on appellera *mesure martingale associée au numéraire*. Soit

$$Z_T = e^{\int_0^T \gamma^Y(t)d\widehat{W}_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma^Y(t)\|^2 dt} = \frac{Y_T}{Y_0 e^{\int_0^T r(s)ds}}.$$

Par hypothèse, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_T] = 1$ et on peut introduire la mesure de probabilité \mathbb{Q}^Y

$$\frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{Q}} = Z_T.$$

Sous cette probabilité le processus $W_t^Y = \widehat{W}_t - \int_0^t \gamma^Y(s)^\perp ds$ est un mouvement brownien, la dynamique des actifs devient

$$dS_t = \text{diag}[S_t](\sigma(t) - \mathbf{1}\gamma^Y(t))dW_t^Y$$

et leurs prix sont des martingales locales.

Définition 9. Soit Y un numéraire et \mathbb{Q} la probabilité risque-neutre. Alors la mesure de probabilité \mathbb{Q}^Y définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{Y_T}{Y_0 e^{\int_0^T r(s) ds}}$$

s'appelle la mesure martingale associée à Y .

Changement de numéraire et portefeuilles Dans ce paragraphe nous montrons que les notions de base de mathématiques financières ne dépendent pas du choix de numéraire.

Proposition 4. *La notion de portefeuille autofinçant est invariante par changement de numéraire.*

Démonstration. Supposons que la dynamique du numéraire $(Y_t)_{t \geq 0}$ est donnée (sous forme matricielle) par

$$dY_t = Y_t (b^Y(t)dt + \gamma^Y(t)dW_t).$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(x, y) = \frac{x}{y}$, on trouve

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) &= \frac{dX_t}{Y_t} - \frac{X_t}{Y_t^2}dY_t + \frac{X_t}{Y_t^3}d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle X, Y \rangle_t}{Y_t^2} \\ &= \sum_{i=0}^d \delta_i \left\{ \frac{dS_t^i}{Y_t} - \frac{S_t^i}{Y_t^2}dY_t + \frac{S_t^i}{Y_t^3}d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle S^i, Y \rangle_t}{Y_t^2} \right\} = \sum_{i=0}^d \delta_i d\left(\frac{S_t^i}{Y_t}\right). \end{aligned}$$

□

Afin de parler des opportunités d'arbitrage il nous faut maintenant démontrer que la notion de portefeuille admissible est également invariante par changement de numéraire. Cependant, définition 5 n'est clairement pas adaptée à ce cadre car elle dépend de la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . Lorsque le portefeuille est écrit dans le numéraire Y on dira qu'il est admissible si sa valeur vérifie

$$X_t^Y \geq M_t^Y, \quad 0 \leq t \leq T \tag{5.9}$$

presque sûrement, où M^Y est \mathbb{Q}^Y -martingale. Il est clair que la nouvelle définition coïncide avec l'ancienne lorsque le numéraire Y est l'actif sans risque. De plus, elle a l'avantage d'être invariante par rapport au choix de numéraire.

Proposition 5. *Soit X un portefeuille autofinçant et Y un numéraire. Alors la condition (5.9) est vérifiée si et seulement si la condition (5.5) est vérifiée.*

Démonstration. Supposons que la condition (5.5) est vérifiée. Alors il existe une \mathbb{Q} -martingale M tel que

$$\tilde{X}_t \geq M_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad \iff \quad X_t^Y \geq \frac{M_t e^{\int_0^t r(s) ds}}{Y_t} := M_t^Y.$$

Lemme 3 implique alors que M^Y est un \mathbb{Q}^Y -martingale. L'implication inverse se démontre de la même manière. □

Ensemble, les deux proposition précédentes impliquent qu'une stratégie qui est un arbitrage dans un numéraire est un arbitrage dans tout autre numéraire. La notion d'absence d'arbitrage est donc invariante par changement de numéraire.

Formule de Black-Scholes généralisée On considère une option d'échanger le flux F^1 contre le flux F^2 à la date T . On suppose que pour les flux F^1 et F^2 il existent des portefeuilles de réplication, dont les valeurs seront notées par F_t^1 et F_t^2 , qui sont *lognormaux*, de volatilités (vectorielles) $\gamma^1(t)$ et $\gamma^2(t)$, c'est-à-dire qu'ils ont les dynamiques

$$\frac{dF_t^1}{F_t^1} = b^1(t)dt + \gamma^1(t)dW_t, \quad \frac{dF_t^2}{F_t^2} = b^2(t)dt + \gamma^2(t)dW_t,$$

où b^1 , b^2 , γ^1 , γ^2 ainsi que le taux d'intérêt r sont des fonctions déterministes. Nous noterons par \mathbb{Q}^1 et \mathbb{Q}^2 les mesures martingales associées, respectivement, aux numéraires F^1 et F^2 . On a alors :

$$\frac{d\mathbb{Q}^1}{d\mathbb{Q}} = \frac{F_T^1}{F_0^1} e^{-\int_0^T r(s)ds} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbb{Q}^2}{d\mathbb{Q}} = \frac{F_T^2}{F_0^2} e^{-\int_0^T r(s)ds}.$$

Le prix de l'option d'échange peut alors être exprimé de manière suivante.

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} (F_T^1 - F_T^2)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} F_T^1 \mathbf{1}_{F_T^1 \geq F_T^2} | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} F_T^2 \mathbf{1}_{F_T^1 \geq F_T^2} | \mathcal{F}_t] \\ &= F_t^1 \mathbb{Q}^1[F_T^1 \geq F_T^2 | \mathcal{F}_t] - F_t^2 \mathbb{Q}^2[F_T^1 \geq F_T^2 | \mathcal{F}_t] \\ &= F_t^1 \mathbb{Q}^1 \left[\frac{F_T^1}{F_T^2} \leq 1 | \mathcal{F}_t \right] - F_t^2 \mathbb{Q}^2 \left[\frac{F_T^1}{F_T^2} \geq 1 | \mathcal{F}_t \right] \\ &= F_t^1 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) - F_t^2 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma^1(s) - \gamma^2(s)\|^2 ds$, puisque $\frac{F_t^2}{F_t^1}$ est une martingale lognormale de volatilité $\gamma^1(t) - \gamma^2(t)$ sous \mathbb{Q}^1 et $\frac{F_t^1}{F_t^2}$ est une martingale lognormale de volatilité $\gamma^1(t) - \gamma^2(t)$ sous \mathbb{Q}^2 .

En conclusion, pour déterminer le prix d'une option d'échanger le flux F^1 contre le flux F^2 , il faut utiliser l'algorithme suivant :

- Identifier les portefeuilles de réplication F_t^1 et F_t^2 (par exemple, en utilisant la méthode de valorisation risque-neutre), et calculer leur volatilités respectives $\gamma^1(t)$ et $\gamma^2(t)$ *par rapport au même mouvement brownien vectoriel*.
- Calculer le prix de l'option d'échange à la date t avec la formule de Black-Scholes généralisée

$$V_t = F_t^1 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) - F_t^2 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right),$$

$$\text{où } Var_t^T = \int_t^T \|\gamma^1(s) - \gamma^2(s)\|^2 ds$$

Par la formule d'Itô, la dynamique de V_t est

$$dV_t = N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) dF_t^1 - N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) dF_t^2.$$

L'option peut donc être répliquée par un portefeuille contenant

$$N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} \text{Var}_t^T}{\sqrt{\text{Var}_t^T}} \right)$$

unités de l'actif F^1 et

$$-N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} \text{Var}_t^T}{\sqrt{\text{Var}_t^T}} \right)$$

unités de l'actif F^2 .

Exemple 5 (Option quanto). Une option quanto est une option sur un titre étranger avec strike en monnaie étrangère, dont le pay-off est converti en monnaie domestique moyennant un taux de change fixé dans le contrat. Le pay-off est donné par

$$\bar{X}(S_T - K),$$

où \bar{X} est le taux de change contractuel. Pour simplifier la notation, nous posons $\bar{X} = 1$ dans la suite. Cette option est sensible à la fois au risque de fluctuation de l'actif étranger et au risque de change.

Nous noterons le taux d'intérêt domestique par $r(t)$ et le taux d'intérêt étranger par $r^e(t)$. Les deux taux sont supposés déterministes. La dynamique de l'actif étranger S est

$$\frac{dS_t}{S_t} = b(t)dt + \gamma(t)dW_t,$$

et le taux de change X (valeur en monnaie domestique d'une unité de monnaie étrangère) suit la dynamique

$$\frac{dX_t}{X_t} = b^X(t)dt + \gamma^X(t)dW_t.$$

La probabilité risque-neutre sur le marché étranger est notée par \mathbb{Q}^e .

Nous appliquons les résultats de la section précédente avec $F^1 = S_T$ et $F^2 = K$. La valeur du portefeuille de replication pour F^2 est clairement donnée par $F_t^2 = e^{-\int_t^T r(s)ds} K$. La valeur du portefeuille de replication pour F^1 est

$$\begin{aligned} F_t^1 &= X_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^e} \left[e^{-\int_t^T r^e(s)ds} \frac{S_T}{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= X_t S_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^e} \left[\frac{1}{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] e^{-\int_t^T \gamma(s)^\perp \gamma^X(s)ds} \\ &= S_t e^{\int_t^T (r^e(s) - r(s))ds} e^{-\int_t^T \gamma(s)^\perp \gamma^X(s)ds}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que pour tout vecteur gaussien 2-dimensionnel (X, Y) ,

$$\mathbb{E}[e^{X+Y}] = \mathbb{E}[e^X] \mathbb{E}[e^Y] e^{\text{cov}(X,Y)}.$$

Le prix de l'option est donc donné par la formule (5.10), avec $\text{Var}_t^T = \int_t^T \|\gamma(s)\|^2 ds$.

Exercice 1. Calculer la stratégie de couverture pour l'option quanto.

Exemple 6 (Taux d'intérêt stochastiques et probabilité forward-neutre). Dans cet exemple nous supposons que le taux d'intérêt n'est pas déterministe mais peut varier de manière stochastique. Ceci implique que les zéro-coupons sont des actifs risqués. Nous supposons que le prix du zéro-coupon d'échéance T suit la dynamique lognormale

$$dB_t(T) = B_t(T)(\mu^B(t)dt + \gamma^B(t)dW_t).$$

Le prix d'une option call européen de pay-off $(S_T - K)^+$ peut alors être calculé par la formule (5.10), en posant $F^1 = S_T$ et $F^2 = K$. Les valeurs des portefeuilles de réplication correspondantes sont $F_t^1 = S_t$ et $F_t^2 = B_t(T)$ et le prix de l'option est donné par (5.10) avec $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma(s) - \gamma^B(s)\|^2 ds$.

Il est cependant intéressant de calculer le prix de cet option directement. En prenant l'espérance sous la probabilité risque-neutre, on trouve

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right].$$

Pour la valorisation d'une option d'échéance T en présence de taux d'intérêt stochastiques, il est commode de choisir comme numéraire le zéro-coupon d'échéance T . La probabilité martingale associée à ce numéraire s'appelle la probabilité *forward-neutre* d'échéance T . Elle est définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^T r(s)ds}}{B_0(T)}, \quad D_t = \frac{e^{-\int_0^T r(s)ds} B_t(T)}{B_0(T)}.$$

En utilisant la probabilité forward-neutre, on a alors

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right] = B_t(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right],$$

c'est-à-dire, l'effet des taux stochastiques disparaît sous cette probabilité. De plus, $S_T = \frac{S_T}{B_T(T)}$, et par définition d'une mesure martingale associée à un numéraire, $\frac{S_t}{B_t(T)}$ est une martingale sous \mathbb{Q}^T . Le prix peut donc être calculé en utilisant la formule de Black-Scholes standard, appliqué à $\frac{S_t}{B_t(T)}$, ce qui donne

$$V_t = S_t N(d_1) - K B_t(T) N(d_2),$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{S_t}{K B_t(T)} \pm \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}.$$

5.3 Options à barrière et réplication statique

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre du modèle Black-Scholes unidimensionnel avec volatilité et taux d'intérêt constants. Nous allons nous intéresser aux options à barrière avec fonctions pay-off arbitraires (pas nécessairement des calls et des puts). Le prix d'une option Up and In qui paye $f(S_T)$ à la date T si la barrière B a été franchie avant cette date sera noté par $UI_t(S_t, B, f(S_T), T)$, où t est la date courante et S_t est le prix courant du sous-jacent. De la même

manière, UO est le prix d'une option Up and Out, et $EUR_t(S_t, f(S_T), T)$ est le prix d'une option européenne de pay-off $f(S_T)$. Ces fonctions vérifient les relations immédiates suivantes :

$$UI_t + UO_t = EUR_t \quad (5.11)$$

$$UI_t(S_t, B, f(S_T), T) = EUR_t(S_t, f(S_T), T) \quad \text{si } f(z) = 0 \text{ pour } z < B \quad (5.12)$$

$$UI_t(S_t, B, f(S_T), T) = UI_t(S_t, B, f(S_T)1_{S_T < B}, T) \quad (5.13)$$

$$+ EUR_t(S_t, f(S_T)1_{S_T \geq B}, T) \quad \text{en général.} \quad (5.14)$$

Valorisation par EDP et réplication dynamique L'approche EDP s'applique aux options Down and Out / Up and Out. Les prix des options In correspondantes peuvent être calculés en utilisant la relation (5.12). Nous nous concentrons sur l'exemple de Up and Out. Par le principe de valorisation risque-neutre,

$$UO_t(x, B, f(S_T), T) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)} f(S_T) \mathbf{1}_{\sup_{t \leq s \leq T} S_s < B} | S_t = x].$$

Soit v une solution régulière de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = r \left(v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right), \quad 0 \leq S \leq B, \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition au bord $v(t, B) = 0 \forall t \in [0, T]$ et la condition terminale $v(T, S) = f(S) \forall S \in [0, B]$. On note enfin $\tau_B = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq B\}$ et $V_t = v(t \wedge \tau_B, S_{t \wedge \tau_B})$. Alors par la formule d'Itô,

$$dV_t = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial S} dS_t + r(V_t - S_t \frac{\partial v}{\partial S}) dt, & t < \tau_B \\ 0, & t \geq \tau_B. \end{cases}$$

Par ailleurs, $V_T = v(T \wedge \tau_B, S_{T \wedge \tau_B}) = f(S_T)$ si $\tau_B > T$ et 0 sinon. On conclut que V_t est la valeur d'un portefeuille autofinçant qui replique le prix de l'option à barrière Up and Out. Il contient $\frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t)$ unités du sous-jacent à toute date $t < \tau_B$ et devient identiquement nul à la date τ_B .

Réplication statique Contrairement aux Calls et Puts européens, le delta d'une option à barrière n'est pas borné, ce qui rend difficile la réplication dynamique de ces options. Nous présenterons maintenant une stratégie de couverture pour les options à barrière qui utilise seulement des positions statiques en options européennes, due à Carr et al. [1998]. La méthode est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1. *Dans le modèle de Black-Scholes,*

$$EUR_t(S_t, f(S_T), T) = EUR_t \left(S_t, \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^\gamma f \left(\frac{S_t^2}{S_T} \right), T \right), \quad (5.15)$$

avec $\gamma = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$ où r est le taux d'intérêt et σ la volatilité.

Démonstration. Commençons par observer que

$$\left(\frac{S_T}{S_0} \right)^\gamma = e^{\sigma \gamma W_T - \frac{1}{2}(\sigma \gamma)^2 T}$$

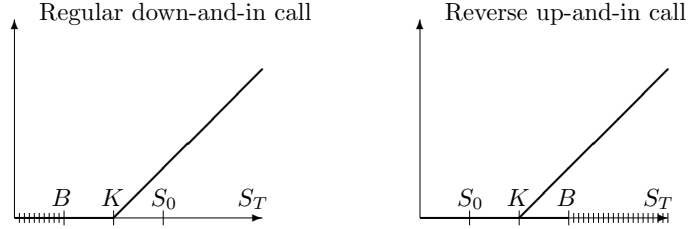


FIGURE 5.1 – Types d'options à barrière.

est d'espérance 1 et nous pouvons introduire une probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ via

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^\gamma.$$

Par le théorème de Girsanov, sous cette probabilité $\tilde{W}_s = W_s - \sigma\gamma s$ est un mouvement brownien. Par ailleurs,

$$\frac{S_0^2}{S_T} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T - \sigma\tilde{W}_T},$$

ce qui montre que la loi de $\frac{S_0^2}{S_T}$ sous $\tilde{\mathbb{Q}}$ est la même que la loi de S_T sous \mathbb{Q} . On en déduit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} f(S_T)] = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[e^{-rT} f\left(\frac{S_0^2}{S_T}\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^\gamma f\left(\frac{S_0^2}{S_T}\right)\right]$$

En appliquant le même résultat entre t et T , la démonstration est terminée. \square

La méthode que nous allons décrire s'applique à tous les modèles qui possèdent une propriété de symétrie de ce type.

Une option à barrière est dite *regular* si la fonction pay-off est nulle à la barrière et au-delà, et *reverse* sinon (voir Fig. 5.1 pour une illustration). Les relations (5.12)–(5.14) impliquent que pour déterminer la couverture pour une option à barrière quelconque, il est suffisant d'étudier les options de type In Regular. De plus, les options Up et Down peuvent être traité de la même manière. Nous allons donc nous concentrer sur les options Up and In Regular dans la suite.

Réplication d'options Regular Soit f la fonction pay-off d'une option Up and In Regular. On a donc $f(z) = 0$ pour $z \geq B$. Soit τ_B le premier temps de passage par le processus de prix au-dessus du niveau B . On considère la stratégie de couverture suivante :

- A la date t , acheter l'option européenne $\text{EUR}_t\left(S_t, \left(\frac{S_t}{B}\right)^\gamma f\left(\frac{B^2}{S_t}\right), T\right)$.
- Lorsque la barrière est atteinte (si jamais), vendre $\text{EUR}_{\tau_B}\left(B, \left(\frac{S_T}{B}\right)^\gamma f\left(\frac{B^2}{S_T}\right), T\right)$ et acheter $\text{EUR}_{\tau_B}(B, f(S_T), T)$. Cette transaction à un prix nul grâce à la relation de symétrie (5.15).

Il est facile de vérifier que cette stratégie réplique l'option $UI_t(S_t, f(S_T), T)$. De plus, on en déduit la formule de pricing suivante :

$$\begin{aligned} UI_t(S_t, B, f(S_T), T) &= \text{EUR}_t \left(S_t, \left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma f \left(\frac{B^2}{S_T} \right), T \right) \\ &= \left(\frac{S_t}{B} \right)^\gamma \text{EUR}_t \left(S_t, f \left(\frac{B^2}{S_t^2} S_T \right), T \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Le cas de calls et puts Equation (5.16) montre que le prix d'une option In Regular peut être exprimé en termes du prix de l'option européenne correspondante, par exemple,

$$UIP_t(S_t, B, K, T) = \left(\frac{S_t}{B} \right)^{\gamma-2} \text{Put}_t \left(\frac{KS_t^2}{B^2}, T \right).$$

Cependant, sauf si $\gamma = 1$, la stratégie de réplication fait intervenir des options européennes autres que calls et puts. Si $\gamma = 1$ (c'est-à-dire que le taux sans risque est nul), les options In Regular peuvent être répliqués statiquement avec une seule option call / put. Par exemple,

$$\begin{aligned} \text{EUR}_t \left(S_t, \left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+, T \right) &= \text{EUR}_t \left(S_t, \left(\frac{KS_T}{B} - B \right)^+, T \right) \\ &= \frac{K}{B} \text{Call}_t \left(\frac{B^2}{K}, T \right). \end{aligned}$$

La replication des options Reverse fera intervenir des pay-offs autres que call / put même si $\gamma = 1$.

La replication d'options Regular lorsque $\gamma \neq 1$ est basée sur le résultat suivant.

Lemme 2. Soit f une fonction deux fois dérivable, dont la deuxième dérivée est continue par morceaux. Alors pour tous F, x positifs,

$$f(x) = f(F) + f'(F)(x - F) + \int_0^F f''(K)(K - x)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)(x - K)^+ dK.$$

Démonstration. Laissez en exercice. □

Dans le cas d'une option Put Up and In Regular, la fonction à répliquer est

$$\left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left(\frac{KS_T}{B^2} \right)^{\gamma-1} \left(S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

Cette fonction n'est pas différentiable deux fois mais elle vérifie

$$\left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} f(S_T) + \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left(S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

avec

$$f(x) = \left(\left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) \left(x - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

Les dérivées de la fonction f sont données par

$$f'(x) = \left\{ \gamma \left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-1} + (1-\gamma) \left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-2} - 1 \right\} \mathbf{1}_{x \geq \frac{B^2}{K}}$$

$$f''(x) = (\gamma-1) \left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-2} \left\{ \frac{\gamma K}{B^2} - \frac{\gamma-2}{x} \right\} \mathbf{1}_{x \geq \frac{B^2}{K}}.$$

Au final, prenant $F = \frac{B^2}{K}$ dans Lemma 2, on a

$$\left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left(S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+ + \int_{B^2/K}^\infty \left(\frac{B}{x} \right)^{2-\gamma} \left\{ \frac{\gamma K}{B^2} - \frac{\gamma-2}{x} \right\} (S_T - x)^+ dx.$$

5.4 Swaps de variance

Un autre exemple d'application du principe de réplication statique est donné par les swaps de variance. Les swaps de variance sont des actifs contingents qui permettent de prendre des positions sur la volatilité (variance) de sous-jacent. Un swap de variance a un pay-off à l'échéance égal à

$$H_T = \frac{NA}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 - N\sigma_K^2,$$

où

- $A = 250$ est le nombre moyen de jours ouvrés dans l'année ;
- N est le nominal du contrat ;
- n représente le nombre de jours ouvrés jusqu'à l'échéance T ;
- σ_K est la volatilité 'strike'.

En d'autres mots, un swap de variance permet d'échanger un montant fixe $N\sigma_K^2$ contre un flux aléatoire égal à la variance réalisée du sous-jacent.

Dans un modèle à trajectoires continues, un swap de variance peut être répliqué par un portefeuille statique contenant des options européennes et un portefeuille dynamique contenant le sous-jacent [Carr and Madan, 1998]. Pour simplifier le traitement, on va approcher la somme dans le pay-off de produit par une intégrale :

$$H_T = N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds - \sigma_K^2 \right\}.$$

Supposons que le sous-jacent S est décrit par

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

où μ_t et σ_t sont deux processus stochastiques. La formule d'Itô donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0}. \quad (5.17)$$

Pour répliquer la variance intégrée, il suffit alors de répliquer les deux termes dans la partie droite.

Soit V_t la valeur du portefeuille qui réplique $\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}$ et soit Q une probabilité risque-neutre. On a alors

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} E \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left\{ \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + r(T-t) \right\} \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$dV_t = r(V_t - \delta_t S_t) dt + \delta_t dS_t \quad \text{avec} \quad \delta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}.$$

Le premier terme de la partie droite de (5.17) peut donc être répliqué par un portefeuille autofinanciant consistant à investir $e^{-r(T-t)}$ en actions et ayant la valeur initiale $V_0 = rT e^{-rT}$.

Le deuxième terme dans la partie droite de (5.17) (le log-contrat) peut être répliqué par un portefeuille statique de calls et puts en utilisant la représentation du Lemme 2. Pour calculer le prix d'une option européenne d'échéance T et de pay-off $f(S_T) = \log \frac{x}{S_0}$, on pose $F = S_0 e^{rT}$ et calcule l'espérance de $e^{-rT} f(S_T)$ sous la probabilité risque-neutre en utilisant la représentation du Lemme 2 :

$$\text{Prix} = e^{-rT} rT - \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK,$$

où $P(T, K)$ est le prix d'un put et $C(T, K)$ le prix d'un call d'échéance T et strike K . En rajoutant ceci au prix du portefeuille de replication pour le premier terme de (5.17), on trouve que le prix du portefeuille de replication pour $\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds$ est égal à

$$\int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

Finalement, le σ_K qui annule la valeur du swap de variance satisfait

$$e^{-rT} \sigma_K^2 = \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

L'indice VIX VIX est l'indice de volatilité d'options sur S&P 500, publié par CBOE. Entre 1993 et 2003, cet indice était calculé comme la moyenne des volatilités implicites de 8 options les plus liquides, mais en 2003 la méthodologie a été changée, et le nouvel indice est calculé en prenant en compte toutes les options par la formule (5.4). Le rapport publié sur le site de CBOE (faites un recherche google sur "vix white paper") donne la nouvelle formule : on calcule

$$VIX_T^2 = \frac{2e^{rT}}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_i(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2,$$

pour les deux échéances les plus courtes T_1 et T_2 , où

- Q_i est le prix de l'option (call ou put) qui est hors de la monnaie pour le strike K_i ;
- F est le forward calculé par la parité call-put ;
- K_0 est le plus grand strike qui est plus petit que le forward ;
- ΔK_i est l'intervalle entre les strikes.

Le troisième terme est un terme de correction :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^F \frac{P(K) - C(K)}{K^2} dK \\
&\approx \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK - \frac{e^{-rT}}{T} \frac{(F - K_0)^2}{K_0^2}.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'indice VIX, on fait une interpolation linéaire entre VIX_{T_1} et VIX_{T_2} pour arriver à une maturité de 30 jours.

5.5 Finance model-free et valorisation robuste des options à barrière

Voir Brown et al. [2001].

Annexe : résumé des résultats du calcul stochastique utilisés dans ce chapitre

Représentation des martingales dans la filtration brownienne Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit \mathbb{F} la filtration canonique du mouvement brownien complétée par les ensembles de mesure nulle, et soit $F \in \mathcal{F}_T$. On note par \mathcal{H}^2 l'ensemble des processus adaptés mesurables $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ tels que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_s^2 ds \right] < \infty.$$

Théorème 10 (Représentation des martingales, cas \mathcal{H}^2). *Pour tout $F \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ il existe un unique processus $H \in \mathcal{H}^2$ tel que*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T H_s dW_s.$$

La condition $H \in \mathcal{H}^2$ est nécessaire pour avoir l'unicité. On note par \mathcal{H}_{loc}^2 l'ensemble des processus adaptés mesurables $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ tels que

$$\int_0^T H_s^2 ds < \infty \quad \text{p.s.}$$

Théorème 11 (Représentation des martingales, cas général). *Pour tout $F \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ il existe un processus $H \in \mathcal{H}_{loc}^2$ tel que*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T H_s dW_s.$$

Exemple 7. Soit W un mouvement brownien standard en dimension 1 et

$$\tau := \inf\{t \geq \frac{1}{2} : \int_0^t \frac{dW_s}{1-s} = 0\}.$$

On pose $M_t = \int_0^t \frac{dW_s}{1-s}$. Par la définition du mouvement brownien, il est facile de montrer que $B_t = M_{\frac{t}{1+t}}$ est un mouvement brownien standard. Cela implique que

$$\tau = \frac{\sigma}{1+\sigma}, \quad \text{avec } \sigma = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$$

et que donc $\tau < 1$ p.s. On a démontré

$$\phi_t = \frac{\mathbf{1}_{t \leq \tau}}{1-t}$$

appartient à \mathcal{H}_{loc}^2 et vérifie

$$\int_0^T \phi_s dW_s = 0.$$

Puisque manifestement le processus $\phi'_s \equiv 0$ vérifie la même condition, la représentation de la variable aléatoire nulle par des processus dans \mathcal{H}_{loc}^2 n'est pas unique.

Changement de probabilité

Théorème 12 (Théorème de Girsanov). *Soit $\phi \in \mathcal{H}_{loc}^2$, et*

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \phi_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\phi_s\|^2 ds\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Supposons que $\mathbb{E}[Z_T] = 1$. Alors le processus

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \phi_s ds$$

est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{Q} = Z_T \mathbb{P}$.

Théorème 13 (Condition de Novikov). *Supposons que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\phi_s\|^2 ds\right)\right] < \infty.$$

Alors $\mathbb{E}[Z_T] = 1$ et le processus $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale.

Lemme 3 (Changement de probabilité dans l'espérance conditionnelle). *Soit \mathbb{Q} une probabilité équivalente à \mathbb{P} et $D_t = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$. Alors*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{D_s} \mathbb{E}[D_t X_t | \mathcal{F}_s].$$

Preuve du lemme. Il faut montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}^Q[X_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^Q \left[\frac{1}{D_s} \mathbb{E}^P [D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right]$$

Mais la partie droite de cette égalité vérifie

$$\mathbb{E}^Q \left[\frac{1}{D_s} \mathbb{E}^P [D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right] = \mathbb{E}^P \left[\mathbb{E}^P [D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right] = \mathbb{E}^P [D_t X_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^Q [X_t \mathbf{1}_A].$$

□