Fonctionnement du marché des taux avant la crise

- Les emprunts des états et les prêts interbancaires sont sans risque: le défaut n'existe que pour les obligations "corporate"
- Tous les instruments disponibles (obligations, swaps, taux Libor) sont utilisés pour construire l'unique "courbe de taux", pour les simulations des flux et pour l'actualisation
- Les différents taux pour la même échéance (Libor vs OIS / Eonia swap) sont quasiment les mêmes
- Il est possible de prêter / emprunter au Libor sans risque: le prix d'une obligation payant en fin de période le taux Libor fixé au début de la période est égal au nominal
- Les taux Libor correspondant aux durées différents sont reliés entre eux:

$$(1+(T_2-T_1)F_t(T_1,T_2))(1+(T_3-T_2)F_t(T_2,T_3))$$
$$=(1+(T_3-T_1)F_t(T_1,T_3))$$

Taux Libor: définition précise

- LIBOR=London InterBank Offered Rate. Etait calculé jusqu'en 2013 pour 10 devises x 15 maturités = 150 taux tous les jours. Les maturités vont de 1 jour à 12 mois.
- Le taux LIBOR est calculé comme le taux moyen d'emprunt sur un panel de (entre 7 et 18) contributeurs, en excluant 25% des taux les plus bas et 25% des taux les plus élevés.
- Plus précisément, les banques doivent répondre à la question: "At what rate could you borrow funds, were you to do so by asking for and then accepting inter-bank offers in a reasonable market size just prior to 11 am?"
- l'EURO fait partie des devises pour lesquels le taux Libor est coté, mais l'Euribor (calculé par European Banking Federation) est plus souvent utilisé.

Taux Libor après la crise

- Après la faillite de Lehmann, les emprunts non-sécurisés sur le marché interbancaire ne sont plus considérés sans risque.
- Ils sont soumis à un "risque de défaut moyen pour une grande banque représentée dans le panel"
- Le risque de défaut augmente avec la maturité: un "basis swap" qui paie Libor3M contre Libor6M n'a plus valeur nulle.
- Les dépôts au jour le jour sont toujours largement considérés comme étant sans risque.
- La courbe des taux sans risque est maintenant calculé uniquement à partir des taux de Overnight Indexed Swaps.

Overnight indexed swap

- Un Overnight Indexed Swap (OIS) est un echange d'une séquence de flux fixes contre une une séquence de flux variables calculés à partir du taux overnight.
- Le taux standard est EONIA (Euro Overnight Index Average) en Europe ou Federal Funds Rate (FF) aux USA: taux moyen des emprunts non-collateralisés au jour le jour sur le marché interbancaire.
- Le risque de défaut pour un horizon aussi court est très faible, et les taux EONIA ou FF sont considerés sans risque.

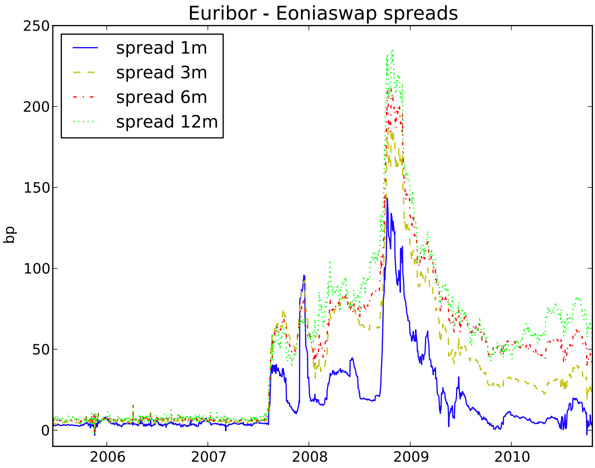
Overnight indexed swap

- Le taux du flux variable d'un OIS payable en T_i est donné par

$$\overline{L}(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\delta_i} \left(\prod_{j=1}^{K_i} (1 + (t_j - t_{j-1}) R(t_{j-1}, t_j)) - 1 \right),$$

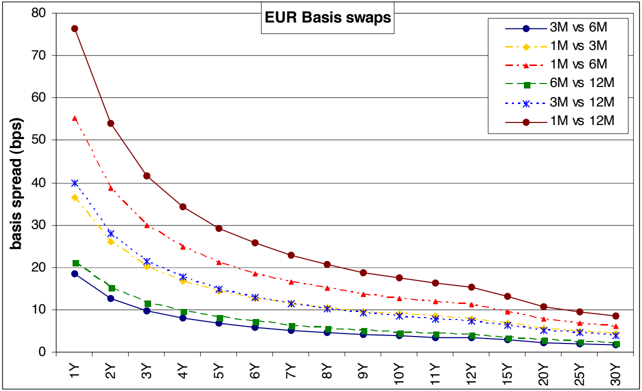
  où $T_{i-1} = t_0 < t_1 < \cdots < t_{K_i} = T_i$ est la partition de la période $[T_{i-1}, T_i]$ en K_i jours, et $R(t_{j-1}, t_j)$ est le taux overnight pour la période $[t_{j-1}, t_j]$.
- Les OIS sont collatéralisés avec ajustement journalier du collateral (qui est lui même capitalisé au taux overnight).
- Le taux OIS pour une échéance donnée est le taux fixe qui annule la valeur de l'OIS.
- La courbe des taux sans risque peut être reconstruite à partir des taux OIS d'échéances différentes.

Libor n'est plus sans risque



Source: Z. Grbac, présentation au séminaire du LPMA

Découplage entre les Libors de durées différentes



Les basis swap spreads observés le 16 février 2009.

Source: M. Bianchetti, “Two Curves, One Price”.

Libor: les développements recents

- Les taux Libor ne correspondent pas à des emprunts réels, mais à des estimations du coût pour un montant "raisonnable".
- Les banques dont les coût d'emprunt sont élevés ont une motivation de diminuer leurs chiffres, pour ne pas apparaître "dangereux".
- En 2012, des manipulations de grande echelle du taux Libor ont été decouverts par les régulateurs et des banques telles que UBS, RBS et Barclays ont du payer des amendes importantes.
- Une reforme du Libor a été mise en oeuvre en 2014:
  - Le nombre de taux a été réduit à 35 (5 devises x 7 échéances)
  - La compilation est effectuée par ICE Benchmark Administration depuis le 1er février 2014 (et non plus par British Bankers Association)
- A la différence du Libor l'Eonia est calculé comme une moyenne pondérée des transactions effectivement réalisées sur le marché interbancaire.

Valorisation des produits de taux après la crise: facteurs à prendre en compte

- Risque de défaut présent dans la définition des produits (via les contributeurs au panel de Libor)
- Risque de contrepartie (avec / sans collateralisation)
- Risque de financement (de la stratégie de couverture)

Voir F. Mercurio (2009), *"Interest rates and the credit crunch: new formulas and market models"*.

- Sur le marché sont cotés des instruments (swaps, FRA, caps, floors, swaptions), dont les sous-jacents sont les taux Libors (ou Eonia) de durées différentes $(\delta_1, \dots, \delta_N)$.
- Pour chaque durée δ_i, on détermine les taux FRA $F^i_t(T, T+\delta_i)$.
- A partir des taux FRA, on déduit la courbe des taux zéro-coupons:

$$F^i_t(T, T+\delta_i) = \frac{1}{\delta_i}\left(\frac{P^i_t(T)}{P^i_t(T+\delta_i)}\right)$$

Le multicurve framework pour les produits dérivés de taux

- En raison du risque de défaut / liquidité associé aux taux Libor, les relations d'arbitrage classiques ne sont plus valables, et les taux FRA de durées différentes sont découplés.

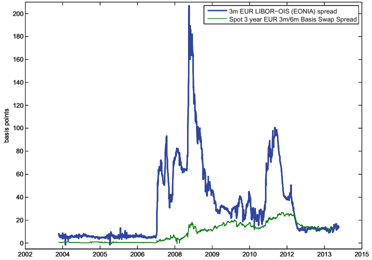
  $\Rightarrow$ On a affaire à N courbes des taux zéro-coupons différentes.
- La courbe des taux zéro-coupons correspondant aux taux OIS joue un rôle particulier.

  Elle est considérée sans risque et utilisée pour actualiser les flux futurs.

  Les zéro-coupons correspondants seront notés par $P_t(T)$

Le multicurve framework pour les produits dérivés de taux

- Pour valoriser un produit dérivé de taux il est souvent nécessaire de diffuser deux courbes de taux différents (e.g., Libor + OIS)
- Les premiers modèles multicourbe introduisaient un spread déterministe entre les deux taux, mais en réalité le spread est stochastique



- Des extensions des grandes classes de modèles de taux au cas multicourbe (taux court, HJM, LMM), avec un spread stochastique, ont été développées
- Dans la suite, on présente une extension du cadre LMM à plusieurs courbes de taux

Pour chaque durée δ_i, on considère un ensemble de dates $(T_k^i)_{k=1}^{n+1}$, $T_k^i = T_1^i + (k-1)\delta_i$.

Les taux FRA correspondants seront notés par

$$L_t^{i,k} := F_t^i(T_k^i, T_{k+1}^i)$$

Par définition du taux FRA, $L_t^{i,k} = F_t^i(T_k^i, T_{k+1}^i)$ est le flux fixe en T_{k+1}^i qui est équivalent au flux variable $F_{T_k^i}^i(T_k^i, T_{k+1}^i)$ (taux Libor observé en T_k^i pour la période (T_k^i, T_{k+1}^i)).

Valorisation d'un swap de taux

On considère un swap de taux, qui, à chaque date T_k^i, $k = 2, \ldots, n+1$, paie un flux variable $\delta_i L_{T_{k-1}^i}^{i,k-1}$ en échange d'un flux fixe $\delta_i K$.

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Swap}_t(K, T_1^i, \ldots, T_{n+1}^i) = \delta_i \sum_{k=2}^{n+1} P_t(T_k^i)(L_t^{i,k} - K).$$

Le taux de swap est

$$S_t(T_1^i, \ldots, T_{n+1}^i) = \frac{\sum_{k=2}^{n+1} P_t(T_k^i) L_t^{i,k}}{\sum_{k=2}^{n+1} P_t(T_k^i)} \neq \frac{P_t(T_1^i) - P_t(T_{n+1}^i)}{\delta_i \sum_{k=2}^{n+1} P_t(T_k^i)}.$$

Formule de marché pour les caplets

On considère un caplet qui paie $(L^{i,k-1}_{T^i_{k-1}} - K)^+$ à la date T^i_k.

Soit $Q^{T^i_k}$ la mesure T^i_k-forward (numéraire $P_t(T^i_k)$). Alors

$$\text{Caplet}_t(K, T^i_{k-1}, T^i_k) = P_t(T^i_k) E^{Q^{T^i_k}}[(L^{i,k-1}_{T^i_{k-1}} - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

$L^{i,k-1}_t$ est une $Q^{T^i_k}$-martingale car par définition,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^{T^i_k} r_s ds}(L^{i,k-1}_{T^i_{k-1}} - L^{i,k-1}_t) | \mathcal{F}_t\right] = 0$$

En supposant que cette martingale est lognormale,

$$\frac{dL^{i,k-1}_t}{L^{i,k-1}_t} = \sigma^k_t dW^k_t,$$

on obtient la formule de Black pour le prix d'un caplet.

Formule de marché pour les swaptions

Le pay-off d'une swaption (à la date T_1^i) est donné par

$$(S_{T_1^i}(T_1^i, \dots, T_{n+1}^i) - K)^+ \delta_i \sum_{k=2}^{n+1} P_{T_1^i}(T_k^i)$$

Introduisant la mesure swap forward $Q^{T_1^i, T_{n+1}^i}$ correspondant au numéraire $A_t := \delta_i \sum_{k=2}^{n+1} P_t(T_k^i)$, le prix de la swaption s'écrit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Swptn}_t(K, T_1^i, \dots, T_{n+1}^i) \\
&\qquad = \delta_i \sum_{k=2}^{n+1} P_t(T_k^i) E^{Q^{T_1^i, T_{n+1}^i}}[(S_{T_1^i}(T_1^i, \dots, T_{n+1}^i) - K)^+],
\end{aligned}$$

où le taux swap est martingale sous $Q^{T_1^i, T_{n+1}^i}$.
En supposant que cette martingale est lognormale, on obtient la formule de Black pour les swaptions.

LMM double-curve

Exemple: pricing d'une swaption dans le modèle LMM.

$$\text{Swptn}_t = P_t(T^i_{n+1}) E^{Q^{T^i_{n+1}}} \left[\frac{\left(\delta_i \sum_{k=2}^{n+1} P_{T^i_1}(T^i_k)(L^{i,k-1}_{T^i_1} - K)\right)^+}{P_{T^i_1}(T^i_{n+1})} \right].$$

Le pay-off ne peut pas être exprimé comme fonction uniquement de $L^{i,\cdot}_{T^i_1}$ mais il est égal à

$$\left(\delta_i \sum_{k=1}^{n} (L^{i,k-1}_{T^i_1} - K) \prod_{j=1}^{k} (1 + \delta_i \tilde{L}^{i,j-1}_{T^i_1})\right)^+,$$

où $\tilde{L}^{i,j}_t = \frac{1}{\delta_i}\left(\frac{P_t(T^i_j)}{P_t(T^i_j + \delta_i)} - 1\right)$ sont les taux forward sans risque.

$\Rightarrow$ Il est nécessaire de décrire la dynamique jointe des taux forward pour les deux courbes sous $Q^{T^i_{n+1}}$.

LMM double-curve

La dynamique des taux forward $L_t^{i,k}$ et $\tilde{L}_t^{i,k}$ est lognormale sous la probabilité correspondante $Q^{T^i_{k+1}}$:

$$\begin{aligned} dL_t^{i,k} &= \sigma_k(t) L_t^{i,k} dZ_k(t) \\ d\tilde{L}_t^{i,k} &= \tilde{\sigma}_k(t) \tilde{L}_t^{i,k} d\tilde{Z}_k(t). \end{aligned}$$

Pour la simulation jointe, il est nécessaire d'exprimer tous les taux sous la même probabilité ($Q^{T^i_{k+1}}$).
On postule:

$$\begin{aligned} \frac{dL_t^{i,k}}{L_t^{i,k}} &= \gamma_k(t) dW_k(t) + \mathrm{drift}_t^k \\ \frac{d\tilde{L}_t^{i,k}}{\tilde{L}_t^{i,k}} &= \tilde{\gamma}_k(t) d\tilde{W}_k(t) + \widetilde{\mathrm{drift}}_t^k, \end{aligned}$$

où $(W_1, \dots, W_n, \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_n)$ est un MB standard sous $Q^{T^i_{n+1}}$.

Correction de drift

Ecrivons la dynamique de $L^{i,n-1}$ et $\tilde{L}^{i,n-1}$ sous $Q^{T^i_{n+1}}$.

$$L_t^{i,n-1}(1+\delta_i \tilde{L}_t^{i,n}) \quad \text{et} \quad \tilde{L}_t^{i,n-1}(1+\delta_i \tilde{L}_t^{i,n})$$

sont $Q^{T^i_{n+1}}$-martingales.

$$\Rightarrow \quad \text{drift}_t^{n-1} = -\frac{\delta_i \tilde{L}_t^{i,n} \langle \gamma_{n-1}, \tilde{\gamma}_n \rangle}{1+\delta_i \tilde{L}_t^{i,n}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{drift}}_t^{n-1} = -\frac{\delta_i \tilde{L}_t^{i,n} \langle \tilde{\gamma}_{n-1}, \tilde{\gamma}_n \rangle}{1+\delta_i \tilde{L}_t^{i,n}}.$$

De manière similaire,

$$\text{drift}_t^{k} = -\sum_{j=k+1}^{n} \frac{\delta_i \tilde{L}_t^{i,j} \langle \gamma_{k}, \tilde{\gamma}_j \rangle}{1+\delta_i \tilde{L}_t^{i,j}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{drift}}_t^{k} = -\sum_{j=k+1}^{n} \frac{\delta_i \tilde{L}_t^{i,j} \langle \tilde{\gamma}_{k}, \tilde{\gamma}_j \rangle}{1+\delta_i \tilde{L}_t^{i,j}}.$$

Le modèle est paramétré par 2 vecteurs de volatilités (un pour chaque courbe) et une matrice de corrélation $2n \times 2n$.

Problématiques récentes dans la modélisation des taux d'intérêt

- Depuis 2015, plusieurs taux de référence court terme sont devenus négatifs
- Les modèles classiques (e.g., LMM log-normal) ne permettent pas au taux de dévenir négatif ou très bas $\Rightarrow$ difficultés pour la valoriser les options de strike faible

- Les modèles gaussiens (Vasicek, HJM) ne résolvent pas le problème: la distribution du taux est très asymétrique et il est possible de detenir des banquenotes au coût limité
- Plusieurs approches de modélisation ont été proposées:
  - Modèle log-normal shifté: un déplacement déterministe est appliquée au taux Libor pour le rendre négatif dans certains scénarios;
  - Bruit gaussien: un bruit gaussien indépendant est rajouté au taux
  - Fonction de transformation: une fonction déterministe est appliquée au taux log-normal pour le rendre négatif